

## درس چهارم: دنباله های حسابی و هندسی

دنباله حسابی:

دنباله حسابی دنباله ای است که هر جمله از جمله پیشین عددی ثابت به جمله قبل بوجود

می آید که بدان عدد ثابت قدر نسبت می گوئیم و با  $a_n$  نشان می دهیم.

مثال:

$2, 6, 10, 14, 18$        $d = 4$   
 $\frac{2}{3}, \frac{7}{4}, \frac{5}{3}, \frac{13}{6}$        $d = \frac{1}{2}$

جمله عمومی دنباله حسابی:

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	...	$t_n$
$t_1$	$t_1 + d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$	...	$t_1 + (n-1)d$

$$(*) \quad t_n = t_1 + (n-1)d$$

مثال: دنباله های زیر را کامل کنید و سپس قدر نسبت و جمله عمومی را بنویسید.

الف)  $4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots$        $d = 2$        $a_n = 4 + (n-1) \cdot 2$   
 $a_n = 4 + 2n - 2$   
 $a_n = 2n + 2$

ب)  $5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots$        $d = 5$        $a_n = 5 + (n-1) \cdot 5$   
 $a_n = 5 + 5n - 5 \Rightarrow a_n = 5n$

پ)  $3, 7, 11, 15, 19, 23, \dots$        $d = 4$        $a_n = 3 + (n-1) \cdot 4$   
 $a_n = 3 + 4n - 4 \Rightarrow a_n = 4n - 1$

ت)  $15, 12, 9, 6, 3, 0, \dots$        $d = -3$        $a_n = 15 + (-3)(n-1)$   
 $a_n = 15 - 3n + 3 \Rightarrow a_n = 18 - 3n$

مسئله: در دنباله ... ۱۸، ۱۴، ۱۰، ۶، جمله پنزدهم را بیست و دومین آورید.

$$a_1 = 9 \quad d = 4$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{15} = 9 + (15-1)4$$

$$a_{15} = 9 + 56 = 65$$

مسئله: جمله نهم یک دنباله حسابی برابر ۳۹، و جمله هفدهم آن ۲۳ است جمله اول

و قدر نسبت را حساب کنید.

$$t_9 = t_1 + 8d \quad \left\{ \begin{array}{l} 39 = t_1 + 8d \\ 23 = t_1 + 14d \end{array} \right.$$

$$t_{17} = t_1 + 14d \quad - \quad (23 = t_1 + 14d)$$

$$14 = 8d \Rightarrow d = -2$$

$$23 = t_1 + 14(-2)$$

$$t_1 = 23 + 28 = 51$$

▲ **دالعه حسابی**

اگر دو جمله  $a$  و  $c$  را داشته باشیم و بین آن ها  $n$  عدد قرار دهیم که با هم تشکیل دنباله حسابی

دهند  $(n+2)$  جمله ، می گوئیم بین  $a$  و  $c$  ،  $n$  دالعه حسابی درج کرده ایم:

**مثال:** بین دو جمله ۵ و ۲۰ ، چهار عدد طوری قرار داده ایم که تشکیل دنباله حسابی دهند آن کدام اند؟

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 20 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & a_4 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & a_3 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & a_2 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & a_1 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & 5
 \end{array}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_4 = a_1 + (4-1)d = 20$$

$$5 + 3d = 20$$

$$3d = 15$$

$$d = 5$$

$\xrightarrow{+5}$   $\xrightarrow{+5}$   $\xrightarrow{+5}$   $\xrightarrow{+5}$   
 5 , 10 , 15 , 20

(\*) حال اگر بین  $a$  و  $c$  یک دالعه حسابی داشته باشیم برای بدست آوردن  $b$  داریم:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

و به  $b$  دالعه حسابی دو عدد  $a$  و  $c$  می گوئیم.

$$b = \frac{a+11}{2} = 8$$

**مثال:** سه عدد  $\frac{2k+1}{a}$  ،  $k+1$  ،  $\frac{3k+7}{c}$  تشکیل دنباله حسابی می دهند  $k$  را بدست آورید.

$$b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow k+1 = \frac{2k+1+3k+7}{2}$$

$$\Rightarrow 2k+2 = 2k+4 \Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1$$

### ▲ رابطه اندیس‌ها بین جمله‌های دنباله حسابی :

بین اندیس‌ها و جمله‌های دنباله‌های حسابی یک رابطه‌ی برقرار است بدین صورت که

اگر جمع اندیس‌های جمله‌ها با هم برابر باشند جمع خود جمله‌ها نیز با هم برابرند:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$$

$$a_1 + a_7 = a_2 + a_6 = a_3 + a_5 = 2a_4$$

$$1+7 = 2+6 = 3+5 = 2(4)$$

مثال: در دنباله حسابی داریم:  $a_1 = 2$  و  $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 100$

قدر نسبت را حساب کنید.

پاسخ:

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 100$$

$$a_5 + a_{10} = 2a_{10}$$

$$a_6 + a_9 = 2a_{10}$$

$$2a_{10} + 2a_{10} + a_{10} = 100$$

$$5a_{10} = 100 \Rightarrow a_{10} = 20$$

$$a_{10} = a_1 + 9d$$

$$20 = 2 + 9d \Rightarrow 9d = 18 \Rightarrow d = \frac{18}{9}$$

نتیجه:

(۱) در بین دنباله‌های زیر دنباله حسابی را مشخص کنید پس جمله بیستم و قدر نسبت را بیابید.

الف)  $a_1 = 3, d = 7$  ... ۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, ...

$$a_{20} = 3 + 19(7) = 136$$

ب)  $2, 3, 4, \dots$  X

پ)  $a_1 = 10, d = -3$  ... ۱۰, ۷, ۴, ۱, ...

$$a_{20} = 10 + 19(-3) = -47$$

ت)  $\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \dots$   $a_1 = \frac{2}{3}, d = \frac{1}{3} \Rightarrow a_{20} = \frac{2}{3} + 19(\frac{1}{3}) = \frac{21}{3} = 7$

(۲) در دنباله حسابی جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. جمله عمومی دنباله را بیابید.

$$a_3 = 20 \quad a_7 = 56$$

$$a_3 = a_1 + 2d = 20$$

$$a_7 = a_1 + 6d = 56$$

$$-4d = -36 \Rightarrow d = 9 \quad a_1 = 2$$

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 9 = 2 + 9n - 9 = 9n - 7$$

$$2, 11, 20, 29, 38, \dots$$

(۳) چندمین جمله دنباله ۷، ۲، و ۳- برابر ۵۷ است؟

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$57 = -3 + (n-1)d$$

$$57 = -3 + dn - d \Rightarrow dn = 57 + 3 \Rightarrow dn = 60$$

$$n = 13$$

جمله سیزدهم

(۴) جای خالی را طوری پر کنید که اعداد تشکیل دنباله حسابی دهند؟

$$\frac{-\sqrt{2}}{2}, -2, \frac{1}{2}, 1, \frac{a}{2}$$

$$a_2 = a_1 + d = -2$$

$$a_4 = a_1 + 3d = \frac{a}{2}$$

$$-3d = \frac{a}{2} - 2 \Rightarrow d = \frac{4-a}{6} \quad a_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

(۵) جمله عمومی دنباله حسابی  $a_n = 7n - 12$  است. قدر نسبت را بیابید. آورید.

$$a_1 = 7 - 12 = -5$$

$$a_4 = 28 - 12 = 16$$

$$16 - (-5) = 21 = d$$

$$a_n = 7n - 12$$

۱۶) در یک دنباله حسابی مجموع ۳ جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی ۳۹ است. پنج جمله اول

دنباله را نوشته و جمله عمومی را مشخص کنید.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3 \Rightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 3$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 39 \Rightarrow a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d = 39$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 3d = 3 \\ 3a_1 + 12d = 39 \end{cases}$$

$$-9d = -36 \Rightarrow d = 4 \quad a_1 = -3$$

-3, 1, 5, 9, 13, 17, ...

$$a_n = -3 + (n-1)4$$

$$a_n = -3 + 4n - 4$$

$$a_n = 4n - 7$$

$$b = \frac{a+c}{2}$$

۱۷) واسطه حسابی بین دو عدد ۲۵ و ۳۱ کدام است؟

$$\text{واسطه حسابی: } \frac{25+31}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

۱۸) واسطه حسابی بین دو عدد ۱۳ و ۱۹ کدام است؟

$$b = \frac{a+c}{2}$$

$$b = \frac{13+19}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$$\begin{array}{ccccccc} & +3 & & +3 & & +3 & & +3 \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\ 9 & , & 12 & , & 15 & , & 18 & , & 21 \\ \downarrow & & & & & & & & \downarrow \\ a_1 & & & & & & & & a_4 \end{array}$$

۱۹) بین دو عدد ۶ و ۲۱ چهار واسطه حسابی درج کنید.

$$a_4 = a_1 + 3d = 21 \Rightarrow 6 + 3d = 21 \Rightarrow 3d = 15 \Rightarrow d = 5$$

(۱۰) بین دو عدد  $-۸$  و  $۲۲$  عدد های درج اولیه

$-۸, -۵, -۲, ۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۶, ۱۹, ۲۲$

$a_1$   $a_{11}$

$$a_{11} = a_1 + 10d \Rightarrow -8 + 10d = 22 \Rightarrow 10d = 30$$

$$d = 3$$

(۱۱) در هر نسبت  $x$  را طوری بیابید که بعد تشکیل دنباله های دهند پس قدر نسبت دنباله را

بیابید

(الف)  $۲x, x, x-۴$

$$2b = a + c$$

$$2(x) = 2x + (x - 4) \Rightarrow 2x = 3x - 4 \Rightarrow x = 4$$

$$۱, ۴, ۰, \dots \quad d = -۴$$

(ب)  $۲x+۱, ۲x-۴, ۳x+۳$

$$2(2x-4) = 3x+3 + 2x+1$$

$$4x - 8 = 5x + 4$$

$$-12 = x$$

$$-۲۳, -۲۸, -۳۳, \dots \quad d = -۵$$