

تابع

زوج مرتب به دو تایی (a, b) گفته می‌شود که a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می‌نامیم. دقت کنید که در زوج مرتب، ترتیب مؤلفه‌ها مهم است؛ یعنی زوج مرتب (a, b) با زوج مرتب (b, a) فرق دارد.

هر زوج مرتب، یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کند و دو زوج مرتب، وقتی با هم برابرند که مؤلفه‌های اولشان با هم و مؤلفه‌های دومشان نیز با هم برابر باشند:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

مثال ۱: اگر دو زوج مرتب $(x - y, 1)$ و $(3, 2x + 3y)$ یک نقطه را در صفحه مشخص کنند، حاصل $3x + 2y$ کدام است؟

۹ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

رابطه

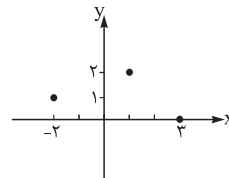
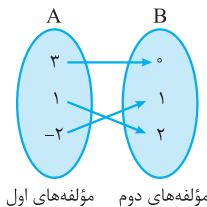
برای نشان دادن ارتباط و وابستگی بین دو مجموعه از رابطه استفاده می‌شود و آن را معمولاً با حرف R نشان می‌دهند. رابطه‌ها را می‌توان به شکل زوج مرتب، جدول، نمودار ون و نمودار دکارتی نشان داد.

$$R = \{(1, 2), (3, 0), (-2, 1)\}$$

x (مؤلفه اول)	۱	۳	-۲
y (مؤلفه دوم)	۲	۰	۱

(زوج مرتب)

(جدول)



مؤلفه‌های اول مؤلفه‌های دوم

(نمودار دکارتی یا نمایش هندسی)

(نمودار ون)

مثال ۲: اگر $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, xy = 10\}$ باشد، رابطه R چند عضو دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

تابع

گفتیم که رابطه‌ها را می‌توان به شکل‌های مختلف مثل زوج مرتب، نمودار ون و ... نشان داد. بدانید که تابع را هم می‌توانیم به همان شکل‌ها نشان دهیم. با هم ببینیم:

تعریف تابع از نظر زوج‌های مرتب

تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن مؤلفه‌های اول متمایز باشند؛ پس اگر دو زوج مرتب پیدا شدند که مؤلفه اول مساوی داشتند، آن رابطه تابع نیست؛ مگر این که مؤلفه‌های دوم آن زوج مرتب‌ها نیز با هم برابر باشند:

$$\text{if } (x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

مثال ۳: کدامیک از رابطه‌های زیر تابع است؟

$$f_1 = \{(0, 1), (-2, 3), (4, 2)\}$$

$$f_2 = \{(1, 2), (3, 4), (1, 2)\}$$

$$f_3 = \{(2, 3), (1, -4), (2, \sqrt{9})\}$$

$$f_4 = \{(-1, 2)\}$$

$$f_5 = \{ \}$$

مثال ۴ (تمرین کتاب درسی): اگر رابطه $\{(a-1, 2), (5, a-2), (a-2, b+3), (3, 5), (5, 3)\}$ تابع باشد، $b+a$ چه قدر است؟

۱۰ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)

مثال ۵ (خارج ۸۵): رابطه $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m ، یک تابع است؟

(۴) هیچ مقدار m

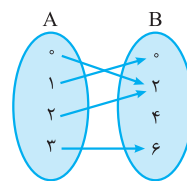
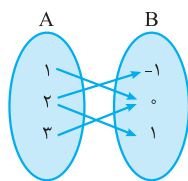
(۳) ۲

(۲) -۱

(۱) -۲

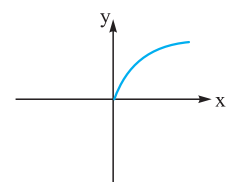
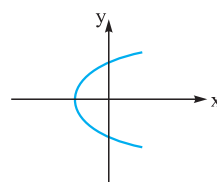
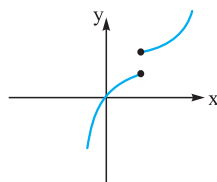
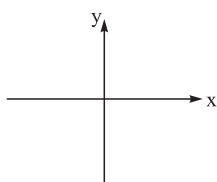
■ تعریف تابع از نظر نمودار ون:

یک رابطه بین مجموعه A و مجموعه B که با نمودار ون نمایش داده می‌شود، وقتی تابع است که از هر مؤلفه مجموعه A (مؤلفه اول) فقط و فقط یک فلش خارج شود نه بیشتر و همه اعضای A به بازی گرفته شوند و هیچ عضوی از A نباشد که از آن فلش خارج نشود. A همان دامنه تابع است.



■ تعریف تابع از نظر نمودار دکارتی (هندسی)

نمودار دکارتی وقتی نشان‌دهنده یک تابع است که هر خط عمودی (موازی محور y ها) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند نه بیشتر.



■ تعریف تابع از نظر ضابطه

ضابطه $y = f(x)$ وقتی نشان‌دهنده‌ی یک تابع است که به ازای هر x حداکثر یک y به دست آید.

مثال ۶: چه تعداد از رابطه‌های زیر، تابع هستند؟

$y^3 - y = 2x - 1$ (ب)	$ 2y - 1 + x - 2 = 0$ (الف)
$y = \sqrt{ x - 1} - \sqrt{1 - x }$ (د)	$(y - 1)^2 + x^2 = 1$ (ج)
$[y] + x^2 - 1 = 0$ (و)	$\sqrt{x - 1} + y^2 = -1$ (هـ)
۴ (۴)	۳ (۳)
	۲ (۲)
	۱ (۱)

قواعد تعیین دامنه

(الف) توابع چندجمله‌ای: دامنه این توابع برابر با \mathbb{R} است.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad D_f = \mathbb{R}$$

مثال:

$$f(x) = x^3 + x^2 + 5 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{3x - 2}{5 + \sqrt{x}} \quad D_g = \mathbb{R}$$

(ب) توابع کسری: اگر ضابطه f کسری باشد (تابع گویا)، x ‌هایی که مخرج را صفر می‌کنند، قابل قبول نیستند.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad D_f = \mathbb{R} - \{x \mid h(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

مثال:

$$f(x) = \frac{x + 1}{[2x - 3]} \quad [2x] - 3 = 0 \Rightarrow [2x] = 3 \Rightarrow 3 \leq 2x < 4 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left[\frac{3}{2}, 2\right) = (-\infty, \frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{\frac{1}{x-1} - 1}{\frac{3x}{x-2}} \quad D_g = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$$

نکته: قبل از تعیین دامنه، حق ساده‌کردن کسر را ندارید!

ج) توابع رادیکالی با فرجه زوج: در این توابع باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt[k]{g(x)} \quad D_f = \{x \mid g(x) \geq 0\}$$

تذکره: اگر رادیکال با فرجه زوج در مخرج کسر باشد، باید زیر رادیکال را فقط بزرگ‌تر از صفر قرار بدهیم.
مثال:

$$f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}} \quad \begin{aligned} 1) \quad 9-x^2 \geq 0 &\Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \\ 2) \quad x^2-1 > 0 &\Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{aligned} \Rightarrow (1), (2) \Rightarrow D_f = [-3, -1) \cup (1, 3]$$

د) توابع رادیکالی با فرجه فرد: برای تعیین دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد، رادیکال را نادیده می‌گیریم.

$$f(x) = \sqrt[k]{g(x)} \quad D_f = D_g$$

مثال:

$$f(x) = \sqrt{\frac{5}{x^2+x-12}} \quad \begin{aligned} x^2+x-12=0 &\Rightarrow (x+4)(x-3)=0 \Rightarrow \\ x=-4, x=3 &\Rightarrow D_f = D_g = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\} = \mathbb{R} - \{-4, 3\} \end{aligned}$$

ه) توابع لگاریتمی: برای تعیین توابع لگاریتمی باید سه شرط زیر را در نظر بگیریم:

$$f(x) = \log_{h(x)} g(x) \quad D_f = \{x \mid g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1\}$$

مثال:

$$f(x) = \log_{-x+4} x-1 \quad \begin{aligned} 1) \quad x-1 > 0 &\Rightarrow x > 1 \\ 2) \quad -x+4 > 0 &\Rightarrow x < 4 \\ 3) \quad -x+4 \neq 1 &\Rightarrow x \neq 3 \end{aligned} \Rightarrow (1), (2), (3) \Rightarrow D_f = (1, 4) - \{3\}$$

و) توابع مثلثاتی: در توابع شامل \sin و \cos ، فقط عبارت جلوی آن‌ها را تعیین دامنه کرده و \sin و \cos را نادیده می‌گیریم.

$$f(x) = \sin g(x) \quad f(x) = \cos g(x) \rightarrow D_f = D_g$$

مثال:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) & D_f &= \mathbb{R} \\ g(x) &= \cos \frac{1}{x} & D_g &= \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

در تعیین دامنه توابع $\tan \theta$ و $\cot \theta$ وضعیت کمی فرق می‌کند. چون $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ است.

مثال ۱۰ (سنجش ۹۴ با کمی تغییر): دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

مثال ۱۱ (کتاب درسی): دامنه تابع $f(x) = 2 \tan(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ کدام است؟

$\mathbb{R} - \{k\pi - \frac{\pi}{4}\}$ (۴)

$\mathbb{R} - \{k\pi + \frac{3\pi}{4}\}$ (۳)

$\mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{4}\}$ (۲)

$\mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{4}\}$ (۱)

مثال ۱۲: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{||x| - 2| - 1}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تابع خطی

تابعی است که ضابطه آن به صورت $y = ax + b$ می‌باشد. در این تابع، a شیب تابع خطی و b عرض از مبدأ است. در این نوع توابع با افزایش منظم در x ها، y ها هم به طور منظم تغییر می‌کنند پس برای تشخیص خطی بودن یک تابع باید بفهمیم که نسبت

تغییرات y به x (همان $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا شیب) ثابت است یا نه.

نکته: اگر $a = 0$ باشد، تابع خطی به تابع ثابت و اگر $b = 0$ و $a = 1$ باشد، تابع خطی به تابع همانی تبدیل می‌شود.

یادآوری: ضابطه تابع ثابت به صورت $y = c$ (c یک عدد ثابت است) و ضابطه تابع همانی به صورت $y = x$ است.

x	-1	1	3	5
y	2/5	3	3/5	4

مثال ۱۳: آیا جدول روبه‌رو نشان‌دهنده یک تابع خطی است؟

معادله‌ی تابع را بنویسید.



مثال ۱۴ (کتاب درسی): جدول زیر دمای سنگ‌های زیرزمین را در عمق‌های متفاوت نشان می‌دهد. دمای سنگ در چه عمقی

عمق (km)	۱	۲	۳	۴
دما (°C)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰

به 40.5°C می‌رسد؟

- (۱) ۱۰ کیلومتر (۲) ۱۱ کیلومتر (۳) ۱۲ کیلومتر (۴) ۱۳ کیلومتر

مثال ۱۵ (کتاب درسی): اگر بین تعداد کالای تولیدشده (x) و سود حاصل از فروش آن‌ها (y)، معادله $y = -300 + 6x$ برقرار باشد، حداقل با تولید چه تعداد از کالا، سوددهی آغاز می‌شود؟

- (۱) ۴۹ (۲) ۵۰ (۳) ۵۱ (۴) ۶۱

مثال ۱۶: اگر f از دو نقطه $A \left(\begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right)$ و $B \left(\begin{matrix} 0 \\ 7 \end{matrix} \right)$ بگذرد، نقطه تلاقی آن با تابع همانی را بیابید.

مقدار تابع

در تابع $y = f(x)$ برای تعیین مقدار تابع در $x = a$ ، به جای x ، a را قرار می‌دهیم. دقت کنید که a می‌تواند یک عدد یا متغیر باشد. اگر تابع چندضابطه‌ای باشد، ابتدا با توجه به دامنه، ضابطه را انتخاب کرده سپس مقدار تابع را به دست می‌آوریم.

مثال ۱۷ (خارج ۸۹): اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد. ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{1-x^2}$ (۲) $\frac{2x}{x^2-1}$ (۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$ (۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

مثال ۲۲: اگر $g(x) = \log(\Delta - x)^2$ ، $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}$ و $h(x) = \sin \frac{1}{x}$ ، دامنه $f - g + h$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

مثال ۲۳: اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x & x > -2 \\ x-2 & x \leq -2 \end{cases}$ باشد، حاصل $\frac{(f+2g)(1)}{(f.g)(-2)}$ چقدر است؟

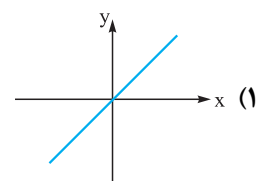
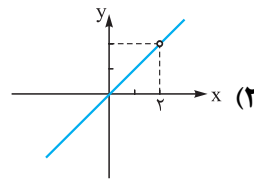
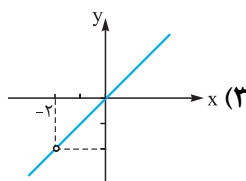
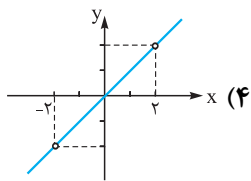
$\frac{3}{5}$ (۴)

$-\frac{2}{5}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$-\frac{1}{3}$ (۱)

مثال ۲۴: اگر $f(x) = x^3 - 4x$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ ، آن گاه نمودار تابع $f \times g$ چگونه است؟



نکته: اگر توابع f و g به صورت زوج مرتب باشند، برای انجام دادن عملیات جبری روی توابع، ابتدا دامنه‌های مشترک دو تابع را پیدا کرده سپس عملیات خواسته شده را بر روی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب انجام می‌دهیم.

مثال ۲۵: اگر $f = \{(-1, 2), (1, -2), (2, 3)\}$ و $g = \{(-2, 0), (-1, 1), (1, 1)\}$ باشند، تابع $g^2 - 3f$ را تشکیل دهید.



مثال ۲۶: اگر $f = \{(1, -1), (2, 3), (3, 0)\}$ و $g = \{(x, x+2) \mid x \in \mathbb{N}\}$ دو تابع باشند، مجموع مقادیر تابع $f^2 + 2g$ چه قدر است؟

۳۸ (۴)

۳۴ (۳)

۲۶ (۲)

۲۰ (۱)

ترکیب توابع

ترکیب دو تابع f و g تابعی است که آن را با نماد $f \circ g$ نشان می‌دهیم و به صورت $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تعریف می‌کنیم و برای تعیین این تابع باید در تابع $f(x)$ به جای x ، $g(x)$ را قرار بدهیم. هم‌چنین برای تعیین تابع $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ باید در تابع $g(x)$ به جای x ، $f(x)$ را قرار بدهیم.

مثال ۲۷ (خارج ۹۲): اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^4 x$ باشند، ضابطه تابع $f \circ g$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \cos^2 2x \quad (۴)$$

$$\frac{1}{4} \cos^2 2x \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{4} \sin^2 x \quad (۲)$$

$$-\frac{1}{4} \sin^2 2x \quad (۱)$$

مثال ۲۸ (سنجش ۹۳): اگر $f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = x^2 - x + 5$ ، نمودارهای دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱ و ۵ (۴)

۱ و ۳ (۳)

۲ و ۵ (۲)

-۵ و -۱ (۱)

مثال ۲۹: اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & 0 < x < 1 \\ 1+x & x < 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $(f \circ f)(-\cos^2 x)$ کدام است؟

$$-\cos 2x \quad (۳)$$

$$-\sin 2x \quad (۳)$$

$$\cos 2x \quad (۲)$$

$$\sin 2x \quad (۱)$$



مثال ۳۰ (ریاضی ۸۶): اگر خروجی از ماشین شکل زیر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

$$\text{خروجی} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow 2x-2 \rightarrow \text{ورودی}$$

۴ (۴)

۳ (۳)

$\frac{7}{2}$ (۲)

$\frac{11}{9}$ (۱)

مثال ۳۱: اگر $f = \{(1, 2), (0, -1), (-1, 1), (2, 3)\}$ و $g = \{(-1, 1), (3, 4), (1, 0)\}$ باشند، تابع $g \circ f$ را تشکیل دهید.

مثال ۳۲ (تجربی ۸۳): اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x-1), x \in A\}$ باشد، تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

مثال ۳۳ (سنجش ۹۲): اگر $f(x) = x - \frac{1}{x}$ و $g = \{(1, 3), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (2, 5)\}$ و $f(g(a)) = \frac{3}{4}$ باشد، کدام

است؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

دامنه تابع مرکب

تابع $f \circ g(x)$ وقتی معنا پیدا می‌کند که اولاً x در دامنه g باشد تا بتوانیم $g(x)$ را تشکیل بدهیم. ثانیاً باید جواب $g(x)$ در دامنه f قرار بگیرد تا ترکیب انجام شود. پس:

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

برای تابع $g \circ f(x)$ نیز خواهیم داشت:

$$D_{g \circ f} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$



مثال ۳۴: اگر $f(x) = \frac{x}{x+2}$ و $g(x) = \frac{x-2}{x-3}$ باشند. آن گاه دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را تعیین کنید. سپس تابع $f \circ g$ را تشکیل داده و تعیین دامنه کنید.

مثال ۳۵: اگر دامنه f بازه $[-1, 1]$ باشد و دامنه تابع $y = f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$ بازه $[a, b]$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

مثال ۳۶ (تمرین کتاب درسی): برای تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ چه دامنه‌ای را انتخاب کنیم تا ترکیب $f \circ f$ قابل انجام باشد؟

- ۱ (۱) $[-\infty, 1]$ ۲ $[-1, +\infty)$ ۳ $[-1, 3]$ ۴ $[-1, 1]$

نکته: اگر توابع $f(g(x))$ و $g(x)$ را داده باشند و بخواهیم $f(x)$ را تعیین کنیم از تساوی $g(x) = t$ ، x را بر حسب t به دست آورده، سپس $f(t)$ و از آن جا $f(x)$ را تعیین می‌کنیم.

مثال ۳۷ (ریاضی خارج ۸۴): اگر $g(x) = \frac{x}{2-x}$ و $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2}x$ باشند، ضابطه f کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{x}{x+1}$ ۲ $\frac{x-1}{x}$ ۳ $\frac{x}{x-1}$ ۴ $\frac{x+1}{x}$

مثال ۳۸: اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow x$ باشند و $f(x) = 2x - 1$ ، مقدار $g(0)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ صفر ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ ۲



مثال ۳۹: اگر $f(\sqrt{x}) = 2x + 1$ و $g\left(\frac{x+1}{x}\right) = x - 3$ مقدار $(g \circ f)(2)$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

نکته: اگر توابع $f(g(x))$ و $g(x)$ را داده باشند و بخواهیم $f(x)$ را تعیین کنیم، گاهی اوقات می توان $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ نوشت و از آن جا $f(x)$ را تعیین نمود.

مثال ۴۰: اگر $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ باشد، مقدار $f(\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۴

مثال ۴۱: اگر $f(\sin x) = \cos 2x$ باشد، حاصل $f\left(\frac{1}{3}\right)$ را بیابید.

نکته: اگر توابع $f(g(x))$ و $f(x)$ را داده باشند و بخواهیم $g(x)$ را تعیین کنیم ابتدا تابع $f(g(x))$ را با $g(x)$ مجهول تشکیل داده و آن را با تابع $f(g(x))$ داده شده مساوی قرار می دهیم و از آن جا $g(x)$ را تعیین می کنیم.

مثال ۴۲: اگر $f(x) = 3x - 1$ و $f(g(x)) = x^2 + 2x$ باشند، تابع $g(x)$ را بیابید؟

مثال ۴۳ (سنجش ۹۳): اگر $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $f \circ g(x) = \frac{4x^2-1}{2x^2-2}$ باشد، مقدار $g(2)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

تابع یک به یک

یک به یک بودن یک تابع را نیز می توان از نظر زوج مرتب، نمودار ون و ... بررسی کرد.

■ تابع یک به یک از نظر زوج مرتب:

در زوج های مرتب وقتی تابع یک به یک است که مؤلفه های دوم، متمایز باشند.

$$f_1 = \{(1, -2), (-3, -4), (-2, -4)\}$$

$$f_2 = \{(1, -5), (-2, -3), (1, -2)\}$$

مثال ۴۴: تابع $f = \{(a+b, 1), (2, 3), (4, 1), (a-b, 3), (5, 6)\}$ یک به یک است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

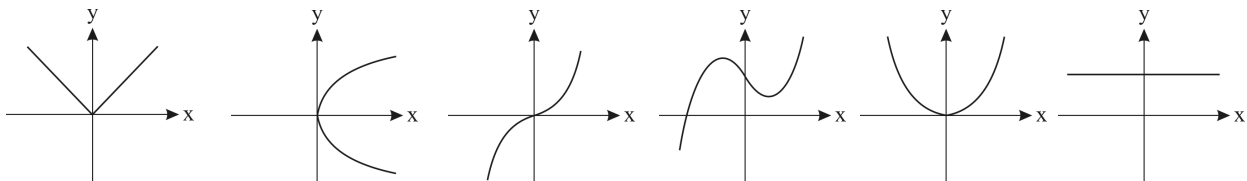
۲ (۲)

۱ (۱)

■ تابع یک به یک از نظر نمودار دکارتی:

نمودار تابعی یک به یک است که در آن هر خط به موازات محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال ۴۵: کدام نمودارها یک به یک اند؟



مثال ۴۶ (آزاد ۸۶): کدام تابع یک به یک است؟

$y = 2x + |x|$ (۴)

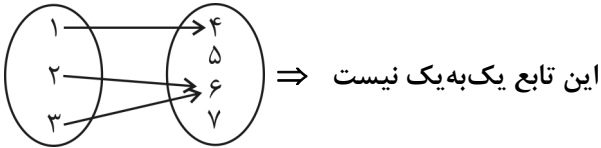
$y = x - |x|$ (۳)

$y = x + |x|$ (۲)

$y = x + |2x|$ (۱)

■ تابع یک‌به‌یک از نظر نمودار ون

نمودار ون یک تابع وقتی یک‌به‌یک است که به هیچ یک از عضوهای مجموعه‌ی B بیش از یک پیکان وارد شود.



■ تابع یک‌به‌یک از نظر ضابطه

ضابطه $y = f(x)$ هنگامی نشان‌دهنده یک تابع یک‌به‌یک است که در آن به ازای هر y حداکثر یک x به دست آید.

مثال: $y = \sqrt{x^2 - 1} \xrightarrow{y=1} 1 = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ یک‌به‌یک نیست.

مثال ۴۷: کدام یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟

(۱) $y = x^2 - 5x$ (۲) $y = x^3 + x^2 + 1$ (۳) $y = x\sqrt{x-1}$ (۴) $y = \frac{x^2}{x-1}$

نکته: توابع هموگرافیک با ضابطه $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ همواره یک‌به‌یک است ولی اگر $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ باشد، این تابع خطی است به موازات

محور x ها که در این حالت تابع به یک تابع ثابت تبدیل شده و یک‌به‌یک نخواهد بود.

مثال ۴۸: به ازای کدام مقدار a نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{(a-1)x+1}{a+(a+1)x}$ یک‌به‌یک نخواهد بود؟

■ تابع وارون (معکوس)

اگر جای مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب یک تابع را عوض کنیم، معکوس یا وارون تابع به دست می‌آید:

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

مثال: $f = \{(1, -2), (3, 0), (4, 1)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(-2, 1), (0, 3), (1, 4)\}$

از مثال بالا مشخص است که $D_{f^{-1}} = R_f$ و $R_{f^{-1}} = D_f$



مثال ۴۹ (خارج ۹۰): دو تابع $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\}$ مفروض اند.

تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\{(4, 4), (1, 1), (3, 4)\}$
 (۲) $\{(3, 3), (5, 5), (4, 3)\}$
 (۳) $\{(2, 2), (1, 1), (4, 4)\}$
 (۴) $\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$

شرط وارون پذیری یک تابع:

اگر مؤلفه های دوم زوج های مرتب تابع f یکسان باشند یا به عبارتی تابع f یک به یک نباشد، f^{-1} تابع نخواهد بود. در این شرایط می گوییم تابع f وارون پذیر نیست. پس شرط وارون پذیری یک تابع، یک به یک بودن آن است.

مثال ۵۰: کدام یک از توابع زیر وارون پذیر است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x+2 & x < 0 \end{cases} \quad (۲) \qquad f(x) = |x+1| + |x-2| \quad (۱)$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x+3 & x < 0 \end{cases} \quad (۴) \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & x \geq 1 \\ -x^2 + 3 & x < 1 \end{cases} \quad (۳)$$

مثال ۵۱: دامنه تابع $f(x) = 3x^2 + ax$ را به گونه ای محدود می کنیم که تابع f در آن بازه وارون پذیر باشد. اگر بازه $]-\infty, 1]$ بزرگ ترین بازه ای باشد که این تابع در آن معکوس پذیر است، a کدام است؟

- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) -۳ (۴) ۳

به دست آوردن ضابطه تابع معکوس

اگر تابع f معکوس پذیر باشد برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون ابتدا x را بر حسب y به دست آورده سپس جای x و y را عوض می کنیم.



مثال ۵۲: ضابطه تابع وارون هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$(۱) \text{ (خارج ۸۷)} \quad y = x^2 - 4x \quad x < 2$$

$$(۲) \text{ (تمرین کتاب درسی)} \quad y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$$

مثال ۵۳: اگر $f(x) = 2x + 3$ و $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-1}{6}$ باشند، ضابطه $g(x)$ را پیدا کنید.

مثال ۵۴: وارون تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را تعیین کنید و از آن جا نتیجه بگیرید که وقتی $a+d=0$ باشد، این تابع وارون خودش خواهد بود.

نکته: اگر نقطه $A(a, b)$ روی تابع f واقع باشد، نقطه $A'(b, a)$ روی تابع f^{-1} واقع است. از این نکته می توان برای تشخیص ضابطه تابع معکوس استفاده کرد.

مثال ۵۵ (تجربی ۹۲): ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟

$$y = -x^2 + 4x - 5 ; x \leq 2 \quad (۲)$$

$$y = x^2 - 4x + 5 ; x \leq 2 \quad (۱)$$

$$y = -x^2 + 4x - 5 ; x \geq 1 \quad (۴)$$

$$y = x^2 - 4x + 5 ; x \geq 1 \quad (۳)$$

مثال ۵۶: نمودار تابع وارون تابع $f(x) = ax + 1$ از نقطه $(4, 1)$ می‌گذرد. در این صورت نمودار تابع f ، از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(2, 6)$ (۲) $(-2, -5)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(10, 3)$

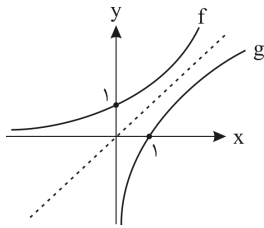
مثال ۵۷ (ریاضی ۸۸): در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ ، مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

- (۱) -8 (۲) -5 (۳) -2 (۴) تعریف نشده

مثال ۵۸ (ریاضی ۹۳): دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = 2x - 5$ و $g = \{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$ مفروض‌اند.

اگر $(f^{-1} \circ g)(a) = 6$ باشد، a کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4




نکته: نمودار دو تابع f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند. به طور مثال در نمودار مقابل دو تابع f و g وارون یکدیگر هستند:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad x \in D_{f^{-1}}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad x \in D_f$$

$$A(2, 5) \in f \Rightarrow A'(5, 2) \in f^{-1}$$

$$f(f^{-1}(5)) = f(2) = 5$$


نکته: ترکیب دو تابع f و f^{-1} تابع همانی است:

مثال:

و برعکس؛ اگر ترکیب دو تابع، همانی باشد، می‌توان نتیجه گرفت آن دو تابع وارون یکدیگرند.

مثال ۵۹: اگر $f(x) = \frac{3x-1}{x-k}$ و $f \circ f^{-1}(x) = x$ باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) -3 (۴) 3

مثال ۶: اگر نمودار $f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار $f \circ f^{-1}(x)$ کدام است؟

