رسم منحنی

به دلیل عدم ایجاد تنوع در رسم اشکال از طریق نرم افزارهای رسم نمودار

و برای ایجاد انگیزۀ بیشتر در فرآیند یادگیری رسم برای اعضای محترم کانال

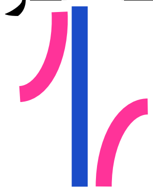
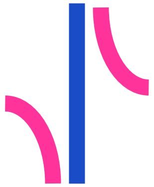
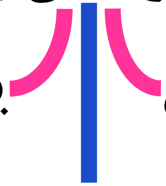
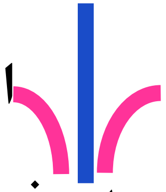
کلیۀ نمودارها به صورت کاملاً سنتی و بدون استفاده از نرم افزار مخصوص رسم شده اند.

سعی کرده ام که در رسم هرنمودار دقت لازم را بکار ببرم.

در تابع های کسری

(که صورت و مخرج چند جمله ای اند و ممکن است قدر مطلق داشته باشیم یا نداشته باشیم) هم مثل حالت های قبل عمل می کنیم. یعنی :

الف) ریشه های صورت و مرتبهٔ ریشه ها را تعیین می کنیم.

ب) ریشه های مخرج را پیدا می کنیم. اگر ریشهٔ مخرج از درجهٔ فرد باشد انفصال ساده داریم، یعنی منحنی اطراف مجانب قائم به شکل  **یا**  **است و اگر ریشهٔ مخرج از درجهٔ زوج باشد (یا داخل قدرمطلق باشد) انفصال مضاعف داریم، یعنی منحنی اطراف مجانب قائم به شکل**  **یا**  **است.**

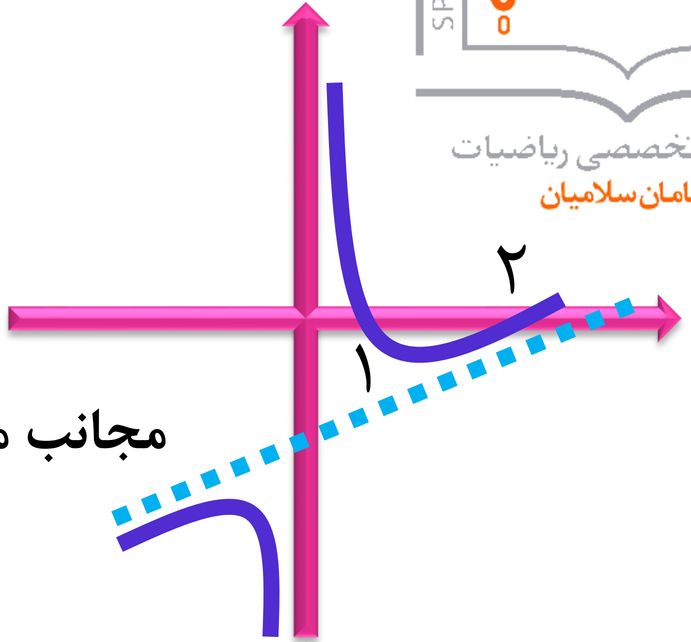
پ) اگر بزرگترین توان(حاصل از تقسیم بزرگترین توان صورت به مخرج) برابر ۱ باشد، منحنی در بینهایت ها مجانب مایل دارد.

ت)اگربزرگترین توان صفرشد(یعنی جملهٔ بزرگترین توان صورت و مخرج توان مساوی داشتند) یا حد تابع وقتی $x \to \pm\infty$ برابر

عدد ثابتی شد، منحنی مجانب افقی دارد. در این حالت باید برخورد منحنی و مجانب افقی اش را هم بررسی کنیم.

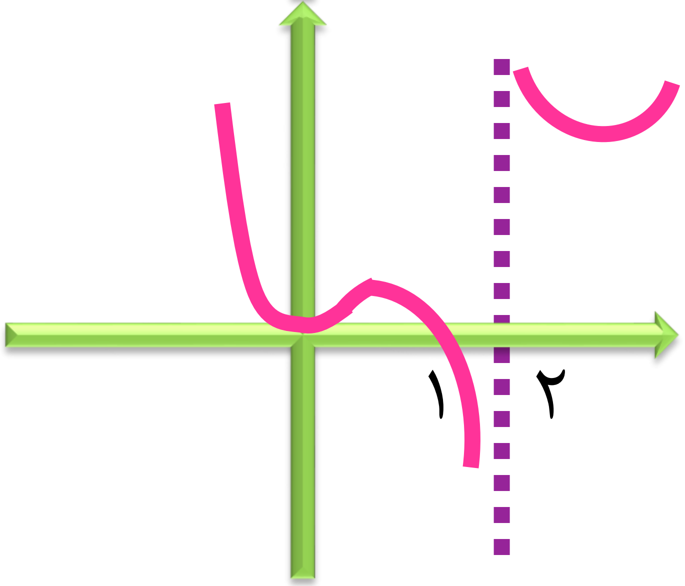
$$y=\frac{(x-1)(x-2)}{x}$$

بزرگ ترین توان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} x=\pm\infty$ مجانب مایل دارد.



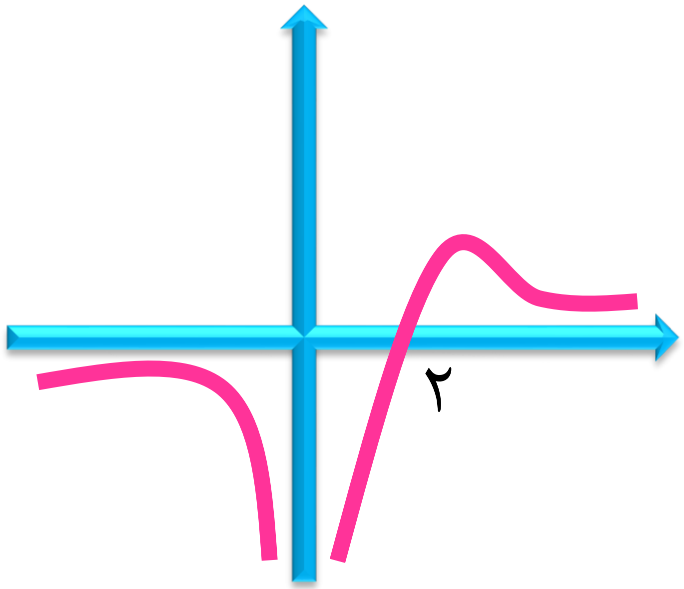
$$y=\frac{x^2(x-1)}{x-2}$$

بزرگ ترین توان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$



$$y=\frac{x-۲}{x^{۲}}$$

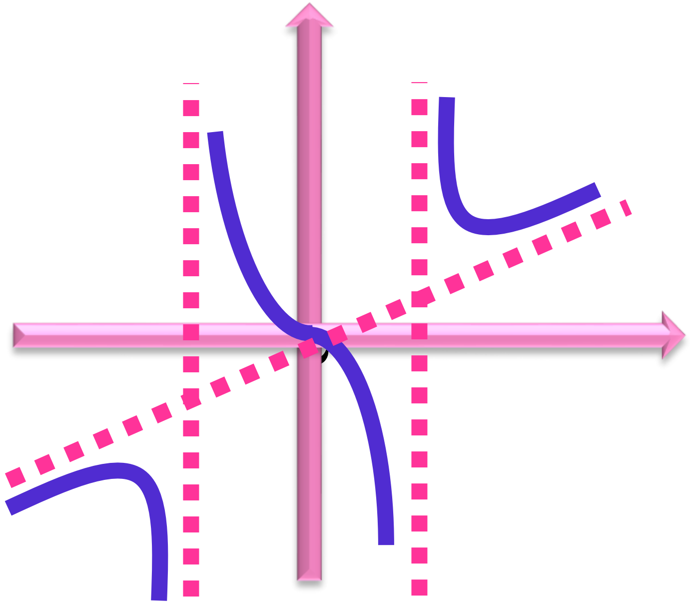
$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^{۲}}=۰$$ مجانب افقی



$$y=\frac{x^{۳}}{x^{۲}-۱}$$

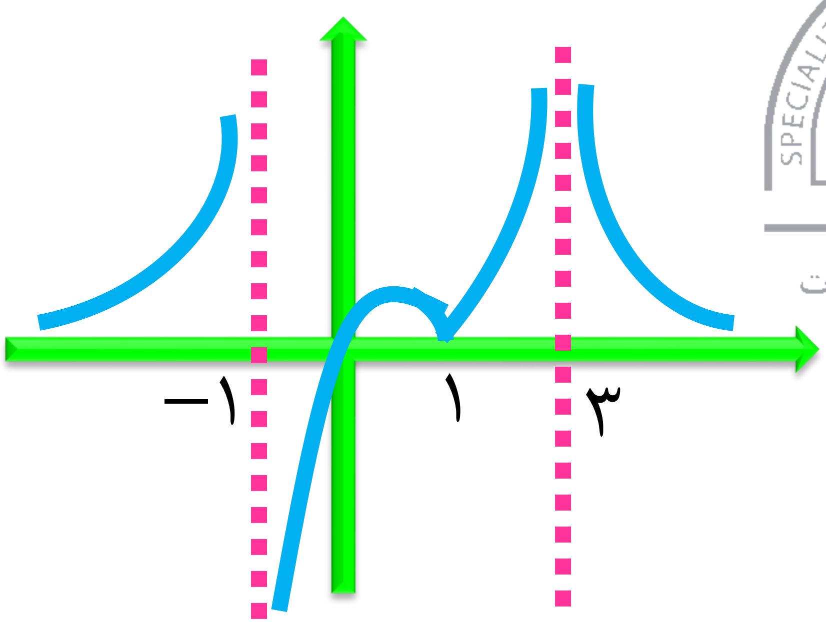
$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۳}}{x^{۲}}=\lim_{x\to\pm\infty} x=\pm\infty$$

مجانب مایل دارد.



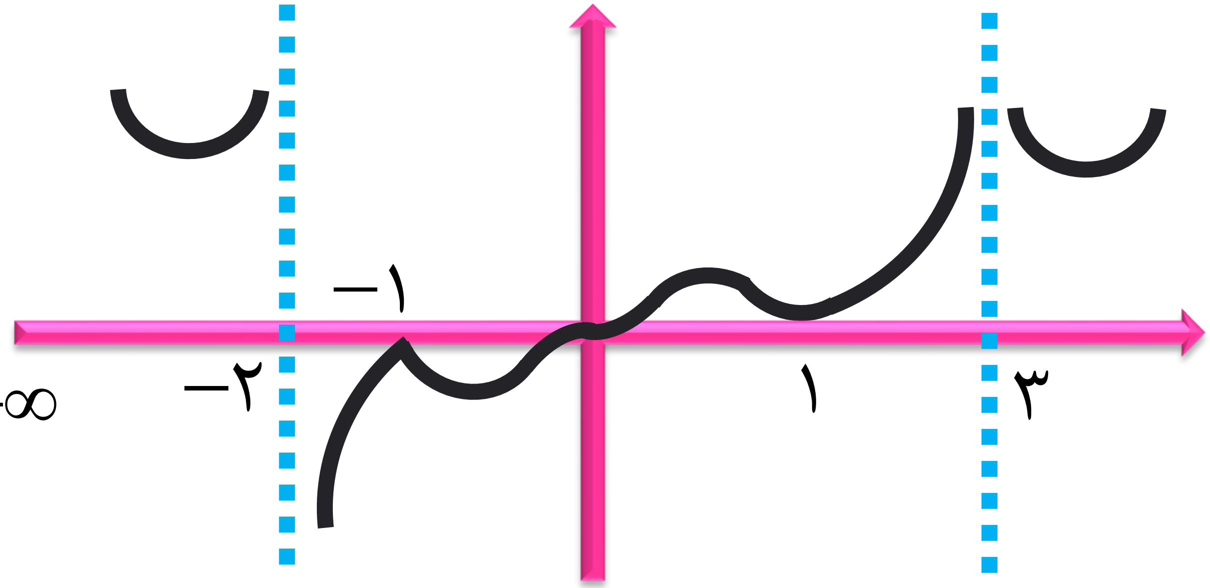
$$y=\frac{x|x-۱|}{(x+۱)(x-۳)^۲}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x|x|}{x^۳}=۰$$ مجانب افقی دارد



$$y=\frac{x^۳(x-۱)^۲|x+۱|}{(x+۲)(x-۳)^۲}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۵|x|}{x^۳}=\lim_{x\to\pm\infty} x^۲|x|=+\infty$$

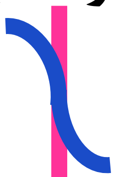
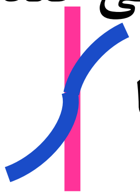
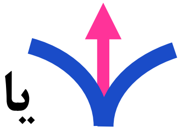
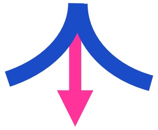


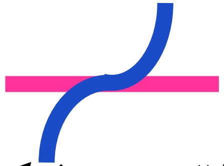
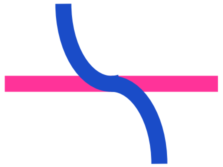
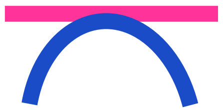
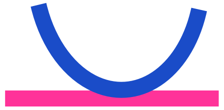
برای رسم نمودار تابع های به شکل

$$f(x) = \sqrt[2m+1]{a(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\dots(x-x_k)^{n_k}}$$

در حالتی که $n_i < 2m+1$ باشد، به ترتیب زیر عمل می کنیم :

الف)ریشه های عامل ها و مرتبهٔ ریشه ها را پیدا می کنیم.

ب)نمودار تابع در ریشه های بدست آمده محور طول ها را قطع می کند. اگر مرتبهٔ ریشه فرد باشد تابع در آن، نقطهٔ عطف قائم دارد و نمودارش به صورت  یا  است و اگر مرتبهٔ ریشه زوج باشد تابع در آن نقطه، نقطهٔ بازگشتی دارد و نمودارش به صورت  یا  است.

پ)در حالتی که $n_i > 2m+1$ باشد، اگر مرتبهٔ ریشه فرد باشد تابع در آن نقطـه، عطـف افقـی دارد و نمودارش به صورت  یا  است و اگـر مرتبـهٔ ریشـه زوج باشـد تـابع اکسترمم نسبی با مماس افقی به شکل  یا  دارد.

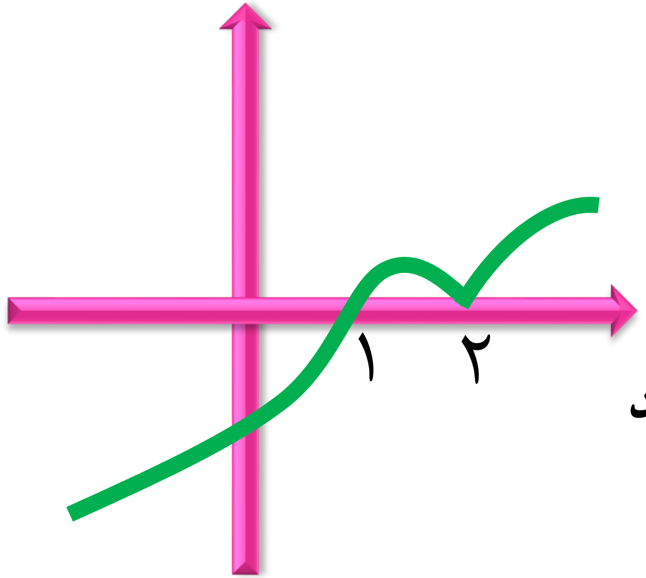
ت)وضعیت y را در $-\infty$ و $+\infty$ مشخص می کنیم و سپس نمودار را رسم می کنیم.

تابع $y=\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$ را در نظر بگیرید:

ریشه ها عبارتند از x=۱ با مرتبهٔ (۱) و x=۲ با مرتبهٔ (۲). تابع در x=۱ عطف قائم ودر x=۲ نقطهٔ بازگشتی دارد.

وقتی $x\to\pm\infty$ داریم :

$$\begin{cases} x\to+\infty & y\to+\infty \\ x\to-\infty & y\to-\infty \end{cases}$$



می دانیم : ۱-توابع رادیکالی در ریشهٔ زیر رادیکال، قائم برمی خیزند.

۲-باید وضعیت تابع را در $\pm\infty$ مشخص کنیم.

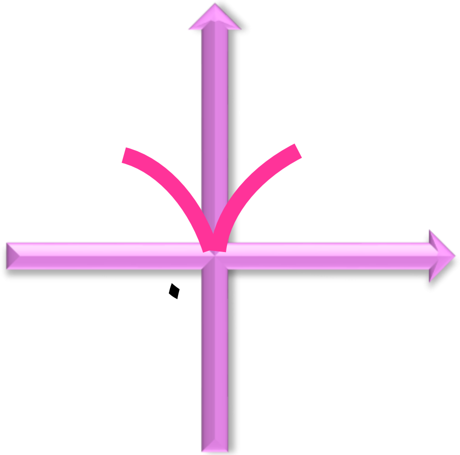
۳-نمودار تابع را با توجه به نقاط یافته شده رسم کنیم.

تمامی این مراحل جمعاً ۳ ثانیه است و باید اینقدر حرفه ای عمل کنید که بتوانید حتی بصورت ذهنی به شکل نمودار پی ببرید.

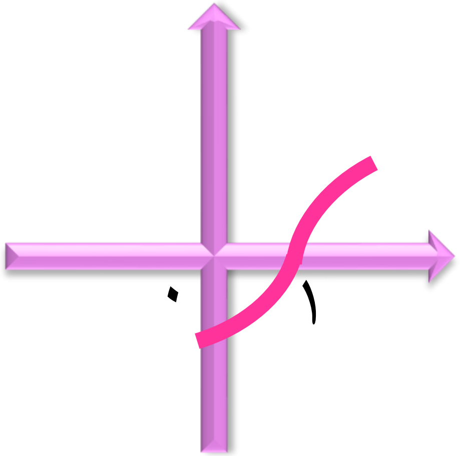
π

SPECIALIZED SCHOOL OF MATHEMATICS
Salamian
مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

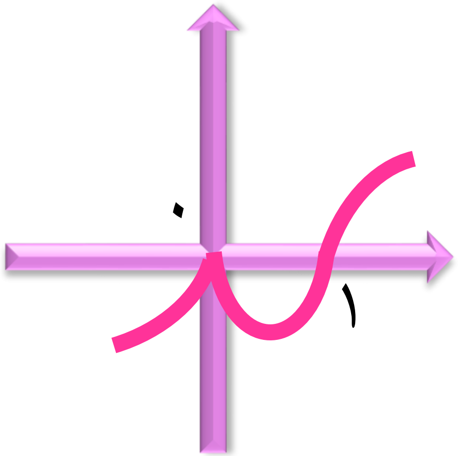
$$y=\sqrt[۳]{x^{۲}}$$



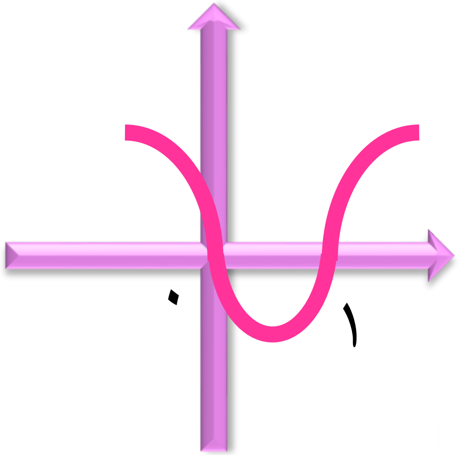
$$y=\sqrt[۳]{(x-۱)}$$



$$y=\sqrt[۳]{x^{۲}(x-۱)}$$

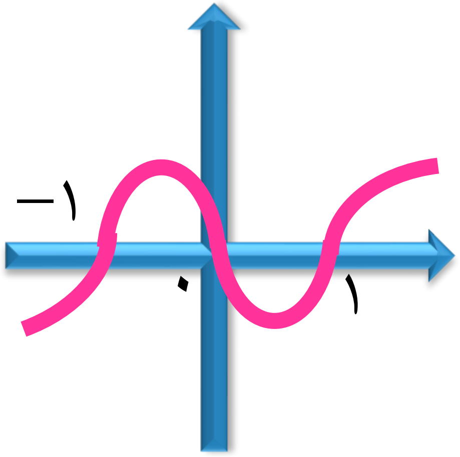


$$y=\sqrt[۳]{x(x-۱)}$$

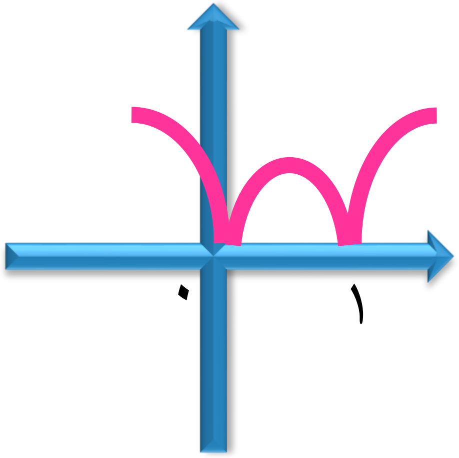


@samansalamian

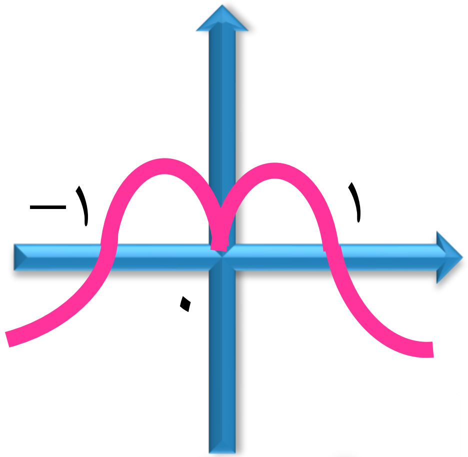
$$y=\sqrt[3]{x^{3}-x}$$



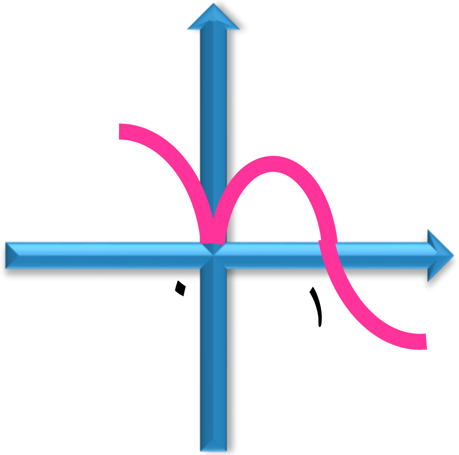
$$y=\sqrt[5]{x^{2}(x-1)^{2}}$$



$$y=\sqrt[5]{x^{2}-x^{4}}$$

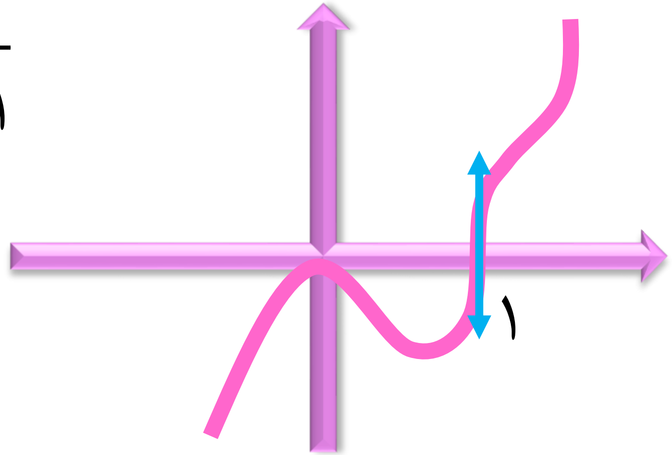


$$y=\sqrt[5]{x^{4}-x^{5}}$$



اگر تعدادی از ریشه ها خارج رادیکال باشند در موردشان مثـل حالت های قبل رفتار می کنیم :

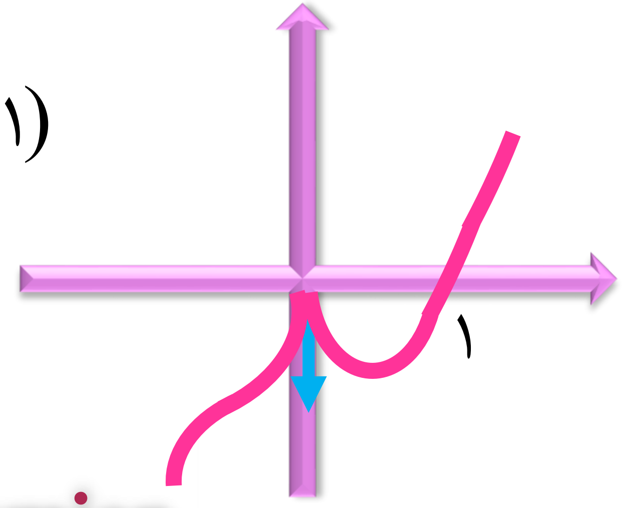
$$y = x^{2}\sqrt[3]{x-1}$$



$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{2}\sqrt[3]{x} \;<\; \begin{matrix}+\infty\\ -\infty\end{matrix}$$

توان بزرگ تر از ۱

$$y = \sqrt[3]{x^{2}}\,(x-1)$$



$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^{2}} \times x \;<\; \begin{matrix}+\infty\\ -\infty\end{matrix}$$

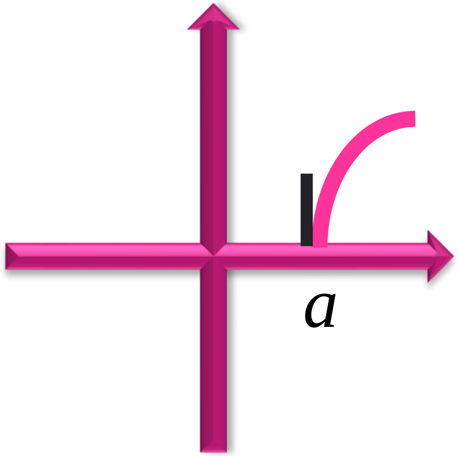
بعضی از منحنی های توابع شامل رادیکال با فرجهٔ زوج خیلی پرتکرارند.

روش رسم(تشریحی) این منحنی ها را در فصل رسم نمودار یاد می گیرید.

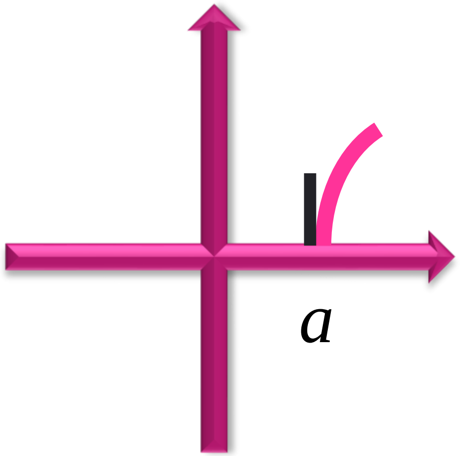
اما بهتر است با تعدادی از مهم ترینِ این توابع آشنا شوید و یک گام از رقبا جلو باشید

(تمام توابع با فرض $a>0$ رسم شده اند)

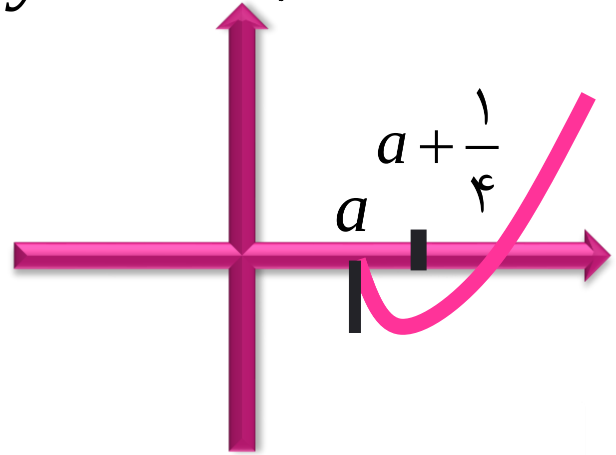
$$y=\sqrt{x-a}$$



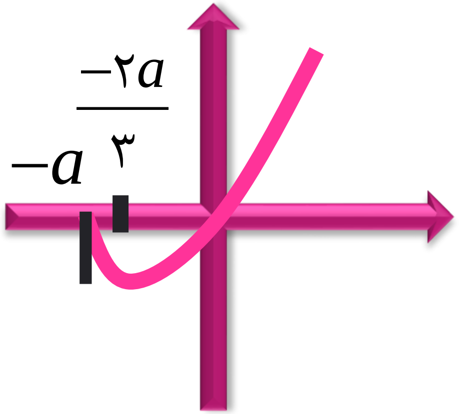
$$y=x+\sqrt{x-a}$$



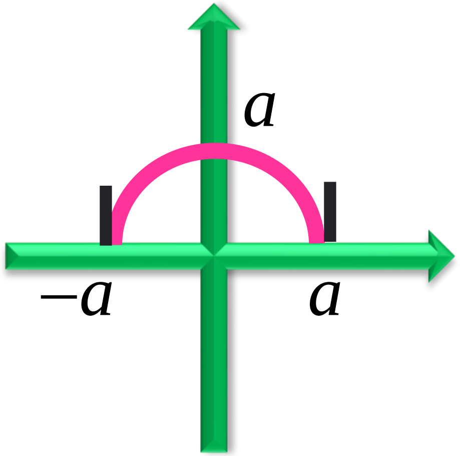
$$y=x-\sqrt{x-a}$$



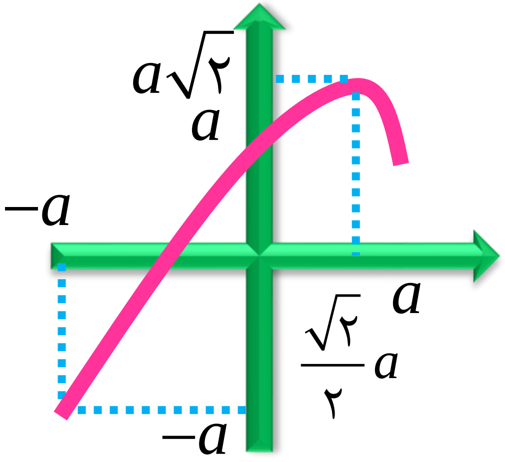
$$y=x\sqrt{x+a}$$



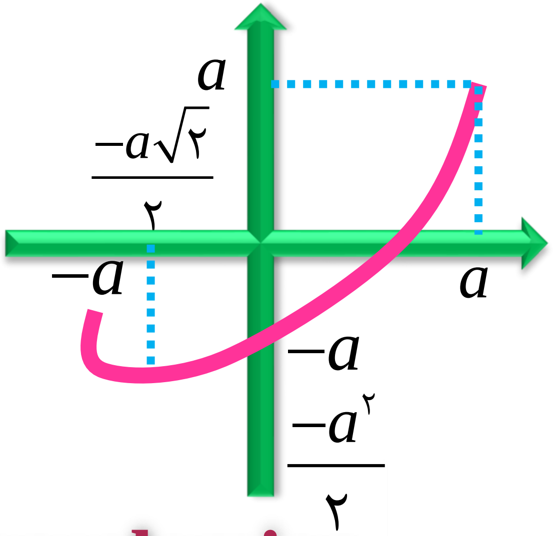
$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$



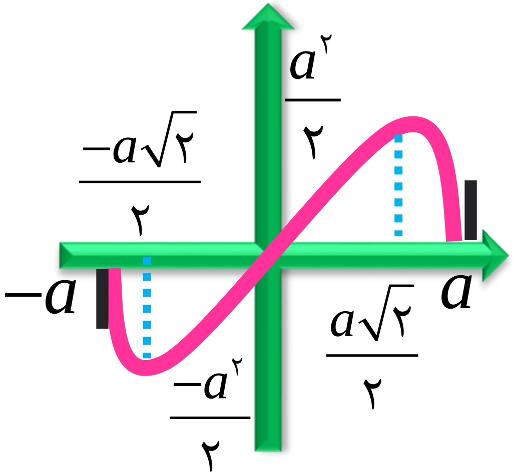
$$y=x+\sqrt{a^2-x^2}$$



$$y=x-\sqrt{a^2-x^2}$$

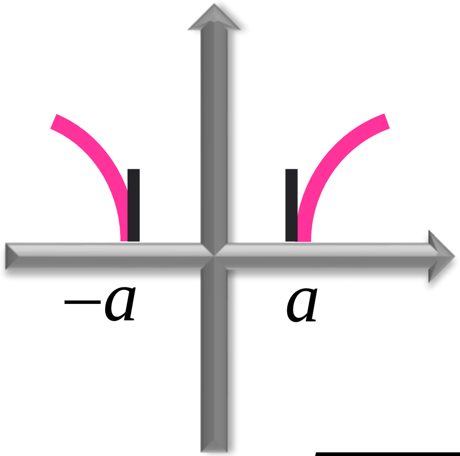


$$y=x\sqrt{a^2-x^2}$$

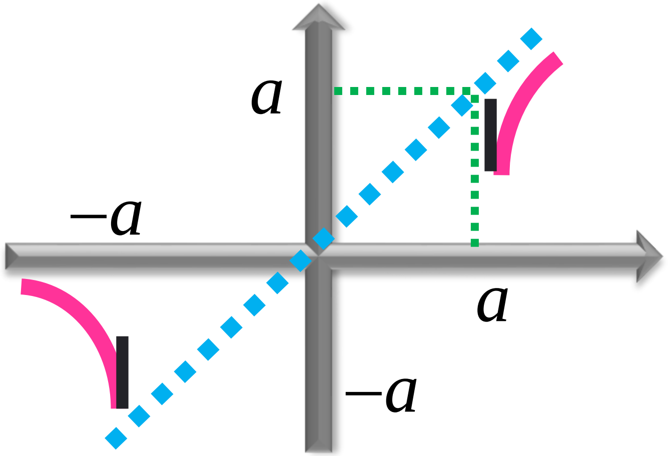


π

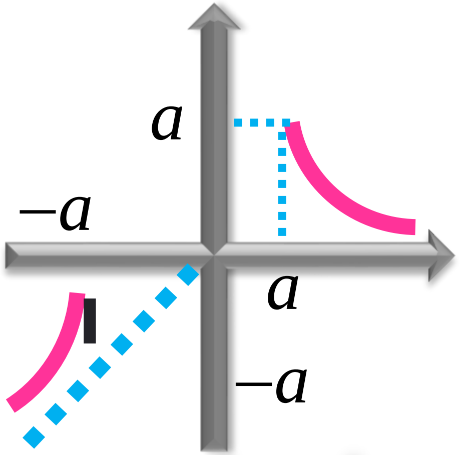
$$y=\sqrt{x^{2}-a^{2}}$$



$$y=x+\sqrt{x^{2}-a^{2}}$$



$$y=x-\sqrt{x^{2}-a^{2}}$$



$$y=x\sqrt{x^{2}-a^{2}}$$