

پاسخنامه تشریحی

۱- حاصل $0.\overline{13} + 0.\overline{25}$ برابر چه عددی است؟

اعداد را مستقیماً با هم جمع می کنیم:

$$\begin{array}{r} 0.\overline{13333}\dots + \\ 0.\overline{25555}\dots \\ \hline 0.\overline{38888}\dots = 0.\overline{38} \end{array}$$

کسر مولد هریک را بدست آورده و باهم جمع و در انتها دوباره به فرم اعشاری تبدیل می کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} 0.\overline{13} = \frac{13-1}{90} = \frac{12}{90} \\ 0.\overline{25} = \frac{25-2}{90} = \frac{23}{90} \end{array} \right\} + \frac{35}{90} = \frac{7}{18} = 0.\overline{38}$$

راه یک

راه دو



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان



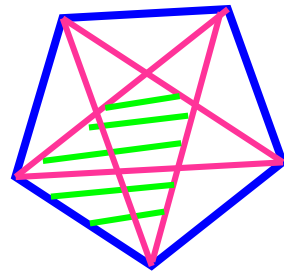
مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۲- اگر n یک عدد طبیعی باشد و $(1 + \sqrt{2})^{2n} = 99 + b\sqrt{2}$ آیا نتیجه می شود که
 $(3 - 2\sqrt{2})^n = 99 - b\sqrt{2}$ در صورت نتیجه گیری عدد b کدام است ؟

می دانیم $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ پس $(1 + \sqrt{2})^{2n} = (3 + 2\sqrt{2})^n$ و $(3 - 2\sqrt{2})^n (3 + 2\sqrt{2})^n = (9 - 8)^n = 1$ یعنی حاصل ضرب دو عدد $(3 - 2\sqrt{2})^n$ و $(3 + 2\sqrt{2})^n$ گویا است پس باید $(3 - 2\sqrt{2})^n$ برابر $99 - b\sqrt{2}$ باشد که حاصل ضرب $99 + b\sqrt{2}$ و $99 - b\sqrt{2}$ هم گویا شود بنابراین داریم :

$$(99 + b\sqrt{2})(99 - b\sqrt{2}) = 1 \Rightarrow 99^2 - 2b^2 = 1 \Rightarrow 2b^2 = 99^2 - 1^2$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{(99-1)(99+1)}{2} = 98 \times 50 = 4900 \Rightarrow b = 70$$

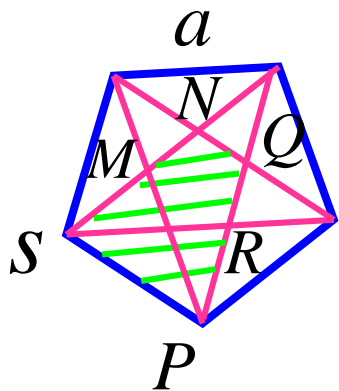


۳- شکل مقابل یک پنج ضلعی منتظم به ضلع a است
 محیط دوزنقه رنگی چه مضربی از a است ؟

طبق اثبات این قضیه که همه شما باید یکدور بر روی کاغذ آنها برای خودتان ثابت می کردید پس

یادتون هست که داشتیم :

$$SM = PR = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, MN = NQ = QR = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a$$



پس محیط دوزنقه $SPQN$ برابر است با :

$$\begin{aligned} 2(SM + MN) + NQ + SP &= 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)a + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)a + a \\ &= 3a + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)a = \left(\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)a \end{aligned}$$

۴- اگر به ازای تمام مقادیر طبیعی n داشته باشیم :

$$1 \leq 5x^2 + 4y^2 - 12x - 4xy + 10 < \frac{n+1}{n}$$

مقدار y برابر کدام است ؟

به ازای تمام مقادیر n داریم :

پس زمانیکه n بسیار بزرگ شود این عبارت باید برابر ۱ شود. یعنی : $5x^2 + 4y^2 - 12x - 4xy + 10 = 1$

$$\Rightarrow 5x^2 + 4y^2 - 12x - 4xy + 9 = 0$$

این عبارت رو به چه فرمی می تونی بازنویسی کنی ؟

آفرین ، مربع دو جمله ای، پس داریم :

$$5x^2 + 4y^2 - 12x - 4xy + 9$$

$$= (4x^2 - 12x + 9) + (x^2 - 4xy + 4y^2)$$

$$= (2x - 3)^2 + (x - 2y)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{4}$$



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۵- دنباله $\{\cos(\frac{\pi}{6}n!)\}$ به چه عددی همگراست؟

$n!$ یعنی $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ از جمله ۴ ام به بعد داریم $\cos 2k\pi$ و این یعنی از جمله ۴ به بعد دنباله ثابت داریم که مقادیر هر جمله ۱ است.



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۶- دنباله $\{n(\sqrt[3]{1 + \sin \frac{2}{n}} - 1)\}$ به کدام عدد همگراست؟

$$\sqrt[3]{1 + \sin \frac{2}{n}} = \left(1 + \sin \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ظاهرها صعب ، باطنها سهل 😊

یاد هم ارزی برنولی و هم ارزی سینوس در حوالی صفر بیفت :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{1 + \sin \frac{2}{n}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(1 + \frac{2}{3n} - 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \times \frac{2}{3n} = \frac{2}{3}$$



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۷- دنباله $\{\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\}$ از لحاظ صعودی، نزولی چه وضعیتی را دارد؟

برای رهایی از شر رادیکال آنرا در مزدوجش ضرب و تقسیم کرده و سپس صورت و مخرج عبارت حاصل را بر \sqrt{n} تقسیم می کنیم:

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \times \frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1}$$

اگر n را زیاد کنیم، مخرج آخرین کسر کم می شود، پس کل کسر زیاد شده و در نتیجه دنباله صعودی است.

از دنباله حد بگیریم به $\frac{1}{2}$ همگرا شده و می دانیم که همه همگراها کراندارند.



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۸- کوچکترین کران بالای دنباله $\left\{ \frac{\cos n\pi \sin \frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n+1}} \right\}$ را بیابید.

$\cos n\pi = (-1)^n$ که بعنوان عامل نوسان یکی در میان ۱ و -۱ را میسازد، همچنین $\sin \frac{n\pi}{2}$ نیز به طور تناوبی ... و ۱ و -۱ و ۱ و ۰ تولید می کند.

$$\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{8}}, \dots$$

چند جمله اول رو بساز تا به ریتم تغییرات پی ببری

Trend is friend

جملات دنباله مثبت، منفی یا صفرند و چون کوچکترین کران بالا در اینجا همان ماکزیمم است پس باید عددی مثبت باشد و جواب جمله سوم $= 1/2$ است.



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \text{sgn}(x - [x])}{x - \text{sgn}(x)}$ را بیابید.

وقتی $x \rightarrow 1$ یعنی ایکس به لبه های ۱ میل کرده، و به خود ۱ دست نمی زند. $x \neq 1$

پس $0 < x - [x] < 1$ است و در نتیجه $\text{sgn}(x - [x]) = 1$ و همچنین $\text{sgn}(x) = 1$ است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \text{sgn}(x - [x])}{x - \text{sgn}(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = 3$$



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۱۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \sin^{-1} x + \pi}{x + 1}$ را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{aligned} HOP \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\cdot^+} = +\infty \end{aligned}$$

جبری-مثلثاتی ها را HOP بزنید.

در تخته های قبلی نمودار آرک ها را برایتان رسم کردم و بر بخاطر سپاریشان تأکید، اگر یادتان باشد آرک سینوس در $(-1)^-$ تعریف نمی شود و دامنه اش $[-1, 1]$ است. پس فقط میتوانید حد را در $(-1)^+$ محاسبه

کنید.



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۱۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\tan^{-1} \frac{x+1}{x-1} - \frac{\pi}{4} \right)$ را بدست آورید.

ابهام $\infty \times \infty$ است. و می توان از قاعده هوییتال استفاده کرد، البته پس از تبدیل x پشت پرانتز به $\frac{1}{x}$ تا عبارت به صورت $\frac{\cdot}{\cdot}$ در بیاید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\tan^{-1} \frac{x+1}{x-1} - \frac{\pi}{4} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x^2)}{(x-1)^2 \left(1 + \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$



راه دیگر مرتبط به ریاضیات پایه مبحث مثلثات است که به سرعت شما را به جواب می رساند.

پس ریاضیات پایه را نباید هیچگاه از برنامه مطالعاتی خود حذف کنید

$$\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1} \left(\frac{a+b}{1-ab} \right) + k\pi$$

$$\tan^{-1} a - \tan^{-1} b = \tan^{-1} \left(\frac{a-b}{1+ab} \right) + k\pi$$



$$\tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \tan^{-1} (1) = \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{1 + \left(\frac{x+1}{x-1} \right) (1)} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{x-1}{2x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x \tan^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \times \frac{1}{x} = 1$$



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۱۲- برای آن که ثابت کنیم $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x - [x]|}$ در نقطه $x = 2$

حد ندارد، دو دنباله مثال می‌زنیم. اگر یکی از دنباله‌ها $\{a_n\}$ باشد، دنباله مناسب دیگر

کدام یک از دنباله‌های $\{[a_n]\}$ یا $\{\frac{a_n + 2}{2}\}$ یا $\{\frac{a_n + |a_n|}{2}\}$ یا $\{\frac{4}{a_n}\}$ مناسب است؟

حد چپ و راست تابع بالا وقتی $x \rightarrow 2$ ، برابر یکدیگر نیست. پس باید دنباله‌هایی را برای انتخاب

کنیم که در $+\infty$ یکی به 2^+ و دیگری به 2^- همگرا شود، لذا اگر $a_n \rightarrow 2^+$ ، دنباله‌های $\{[a_n]\}$ ، $\{\frac{a_n + 2}{2}\}$

و $\{\frac{a_n + |a_n|}{2}\}$ به ترتیب به 2 ، 2^+ و 2^+ میل می‌کنند. اما دنباله $\{\frac{4}{a_n}\}$ به 2^- میل می‌کند چون $\frac{4}{2^+} = 2^-$

پس تنها دنباله مناسب $\{\frac{4}{a_n}\}$ است.



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۱۳- تابع با ضابطه $f(x) = (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{2} x$ ، در نقاط $x \in \mathbb{Z}$

از نظر پیوستگی ، چگونه است ؟

به ازای هر عدد زوج $(x = 2k)$ عامل $\sin \frac{\pi}{2} x$ صفر شده و تابع پیوسته می شود، پس پیوستگی تابع را به ازای اعداد فرد $(x = 2k + 1)$ بررسی می کنیم. (عددی فرد مانند ...، ۱، ۳، ۵، در نظر گرفته و پیوستگی در آن

را بررسی می کنیم :

$$f(1) = (-1)^{[1]} \sin \frac{\pi}{2} = (-1)(1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi x}{2} = (-1)^1 \sin \frac{\pi}{2} = (-1)(1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi x}{2} = (-1)^0 \sin \frac{\pi}{2} = (1)(1) = 1$$

پس تابع به ازای $x \in \mathbb{Z}$ فقط در نقاط با طول صحیح زوج پیوسته است.



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۱۴- تابع $f(x) = [\tan x + \cot x]$ در نقطه $x_0 = \frac{\pi}{4}$

از لحاظ پیوستگی چه وضعیتی دارد؟

بررسی تابع $[\tan x + \cot x]$ در اطراف $x = \frac{\pi}{4}$ سر جلسه کنکور وقت گیر است، در حالیکه کافی بود بر روابط آن در ریاضیات پایه مسلط باشید و یکدور جمع این دو عبارت مثلثاتی را برای خودتان اثبات کرده باشید و

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \left[\frac{2}{\sin 2x} \right] = \left[\frac{2}{1^-} \right] = [2^+] = 2$$

بدانید که :

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \left[\frac{2}{\sin 2x} \right] = \left[\frac{2}{1^-} \right] = [2^+] = 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[\frac{2}{\sin \frac{\pi}{2}} \right] = 2$$

پس تابع پیوسته است.



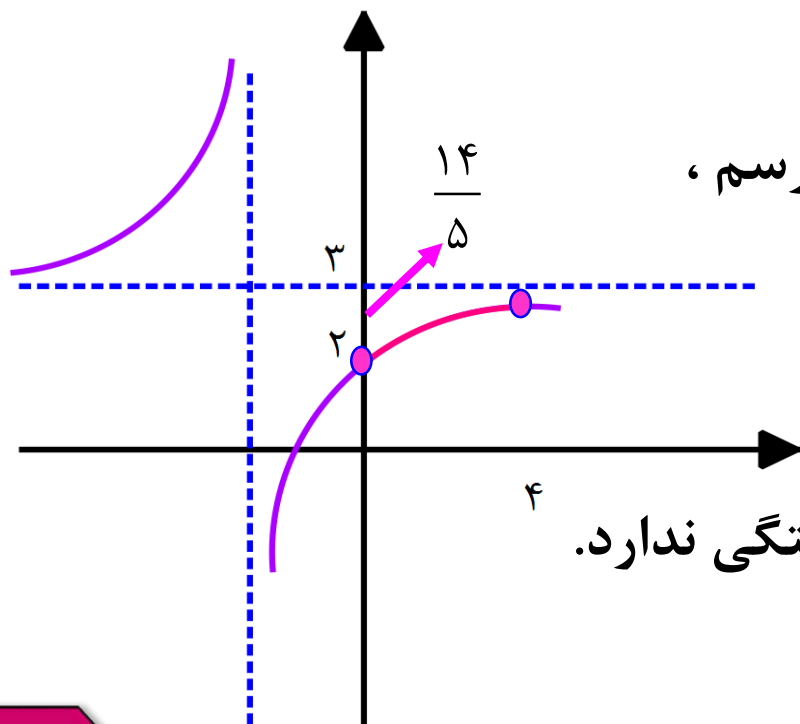
مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۱۵- تابع $f(x) = \left[\frac{3x+2}{x+1} \right]$ در بازه $[0, 4]$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

کافی بود رسم بلد باشید 😊

مراحل: تعیین دامنه، ۱ ثانیه مجانب قائم، ۱ ثانیه مجانب افقی، ۱ ثانیه رسم،

تست بعدی خداحافظ 😊😊😊



تابع در بازه داده شده همواره بین $2 \leq y \leq \frac{14}{5}$ است و نقطه ناپیوستگی ندارد.
چون هیچ خط $x = k$ و $k \in \mathbb{Z}$ ای را قطع نمی کند.



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

$$۱۶- تابع $f(x) = [x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]$ در بازه $[0, 20]$$$

چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

آشناس؟؟ کجا دیدیش؟؟ آره تو فصل صفر سر کلاس اثباتش کردم، می بینی تست مفهومی و ترکیبی یعنی این،

ساده بگم فصل **صفر تو حذف کن** تا **تست پیوستگیت رو هم از دست بدی**، قضاوت با خودت!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

$$[x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \dots + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx]$$

اینم یادآوری از فصل صفر برای

همه داوطلبانی که هیچ فصلی را

حذف نمی کنند.

$$[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x]$$

$$[x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}] = [3x]$$

طبق مطلب تخته قبلی $f(x) = [x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}]$ پس باید دید تابع $f(x) = [3x]$ در بازه $[0, 20]$ چند نقطه ناپیوستگی دارد:

$$\text{نقطه } 61 \Rightarrow 60 \leq 3x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 20$$

تابع در ۵۹ نقطه از این ۶۱ نقطه ناپیوسته است و فقط باید نقاط $x = 0$ و $x = 20$

را بررسی کنیم و چون $3x$ صعودی است، پس تابع مورد نظر در نقاط ذکر شده دارای پیوستگی راست است. و با توجه به بازه در $x = 0$ پیوسته و در $x = 20$ ناپیوسته است.

و در نهایت تعداد نقاط ناپیوستگی می شود: $60 = 1 + 59$ تا



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۱۷- منحنی $y = \frac{\sin^{-1} x}{\tan^{-1}(\sin^4 x)}$ در بازه $(-\pi, \pi)$ چند مجانب قائم دارد؟

برای یافتن مجانب های قائم، مخرج را صفر کرده و ریشه هایی از آن را که در بازه داد شده قرار دارند بعنوان مجانب قائم تابع قرائت کنیم:

$$\tan^{-1}(\sin^4 x) = 0 \Rightarrow \sin^4 x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \Rightarrow \dots, -\pi, \frac{-3\pi}{4}, \frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \dots$$

$$D_{\sin^{-1} x} : [-1, 1] \Rightarrow x = 0, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \in (-1, 1)$$

پس صفر مجانب قائم نیست و منحنی فقط ۲ مجانب قائم دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{\tan^{-1}(\sin^4 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4} \neq \infty$$



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

$$18- \text{فاصله دورترین نقطه منحنی } y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4}$$

از جانب افقی اش چقدر است ؟

تست جالبی است و چندین راه حل دارد. ساده ترین آن قبل از یادگیری کاربرد مشتق، استفاده از روابط

مثلثاتی است که در **ریاضیات پایه** خواندید :

کافی است صورت و مخرج را بر ۴ تقسیم کنید تا به $\frac{x}{x^2 + 1}$ برسید و اگر فرض کنیم $\frac{x}{2} = \tan \alpha$ ، عبارت
به صورت $\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \sin 2\alpha$ درآمده و چون ما کسیمم $\sin 2\alpha$ برابر ۱ است، پس ما کسیمم عبارت
موردنظر هم برابر ۱ است.

سوال : چرا در این تست به دنبال یافتن ما کسیمم بودیم؟؟ (روش فکر کنید تا جلسه بعدی دلیلش رو بگم +

سایر روش های حلش) خیلی مهمه، براش وقت بذار...!!!!



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۱۹- اگر در تابع $f(x)$ با دامنه \mathbb{R} داشته باشیم $f(x) + f(-x) = 0$

و خط $5 = 4x - 3y$ یکی از مجانب های مایل تابع باشد ،

فاصله بین دو مجانب مایل منحنی تابع چقدر است ؟

فاصله دو خط موازی از چه فرمولی تبعیت می کرد ؟

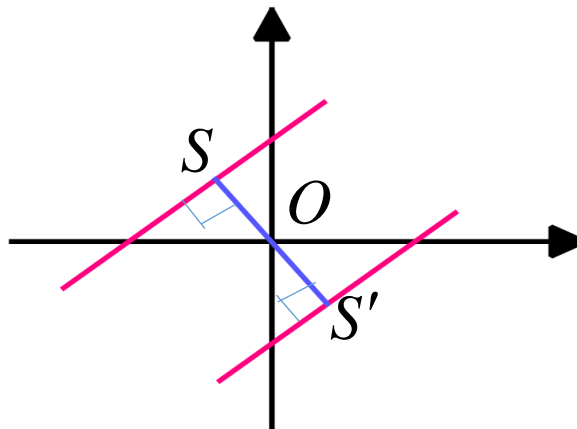
هندسه رو که می خونین دیگه؟؟

طبق هندسه داریم :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{و} \quad a'x + b'y + c' = 0 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$4x - 3y + 5 = 0 \quad \text{و} \quad 4x - 3y - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{|5 - (-5)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

راه یک



می دانیم قرینه هر خط نسبت به مبدأ با خودش موازی است و برای یافتن فاصله دو مجانب کافیست فاصله مبدأ مختصات از یکی از خطوط مثلاً OS را بیابیم.

$$4x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow OS = \frac{|4(\bullet) - 3(\bullet) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

فاصله بین دو مجانب مایل، ۲ برابر این فاصله است. $2 \times 1 = 2$



مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

۲۰- معادلهٔ مجانب مایل تابع $y = 2x \cos \frac{1}{\sqrt{x}}$ کدام است؟

هیچ یک از مدل‌ها و تیپ‌های خاص مجانب‌ها را ندارد، کسری هم نیست پس باید به روش m و h

مجانب مایلش را بیابی. کاربرد و زمان استفاده از هم‌ارزی کسینوس‌ها را که فراموش نکرده‌اید؟؟

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \cos \frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cos \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$$

دامنهٔ تابع بخاطر رادیکال فرجه زوج به منفی بینهایت نرفته‌ها ۲

$$h = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \cos \frac{1}{\sqrt{x}} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x (\cos \frac{1}{\sqrt{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x (1 - \frac{1}{2x} - 1) = -1$$

$$y = mx + h = 2x - 1$$