SPECIALIZED SCHOOL OF MATHEMATICS

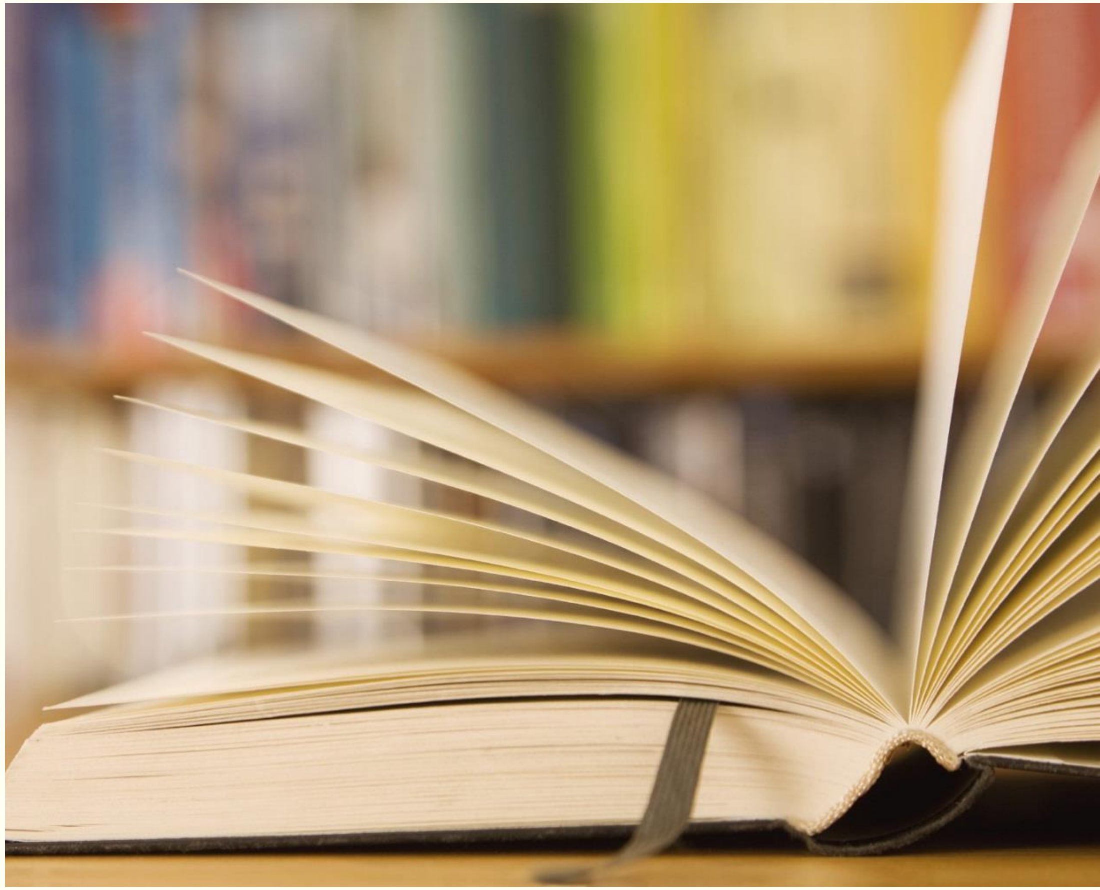
Salamian

مدرسه تخصصی ریاضیات

سامان سلامیان

مدرسه دیفرانسیل و ریاضیات تجربی ایران

مهندس سامان سلامیان



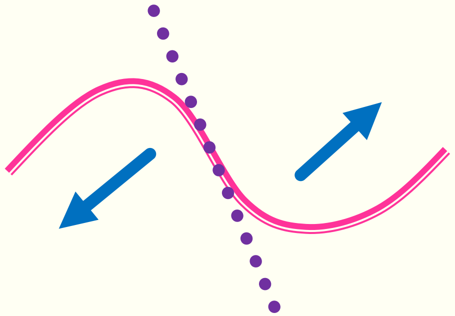
موضوع تخته ها : نقطهٔ عطف

@ samansalamian

نقطهٔ عطف

نقطهٔ عطف منحنی نقطه ای است که در آن جهت تقعر منحنی تغییر می کند.

نقطهٔ عطف دارای ۳ ویژگی زیر است :



۱- تقعر تابع در آن تغییر می کند. (علامت y'' تغییر می کند.)

۲- منحنی تابع در آن نقطه دارای خط مماس است.

۳- منحنی تابع در آن نقطه پیوسته است.

@samansalamian

SPECIALIZED SCHOOL OF MATHEMATICS
Salamian
مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

در مورد نقطهٔ عطف دقت کنید که :

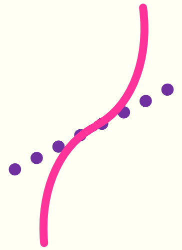
الف) لازم نیست منحنی در نقطهٔ عطف مشتق پذیر باشد.

ب) y'' در نقطهٔ عطف ممکن است برابر صفر باشد یا وجود نداشته باشد.

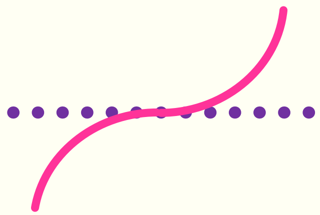
پ) تنها تغییر علامت y'' برای عطف بودن نقطه کافی نیست و باید حتما خط مماس هم داشته باشیم.

خط مماس بر منحنی در نقطهٔ عطف آن از یک طرف بالاتر از منحنی و از طرف دیگر پایین تر از منحنی قرار می گیرد و اصطلاحاً می گوییم خط مماس بر منحنی در نقطهٔ عطف آن از منحنی عبور می کند.

همانطور که گفتم در نقطهٔ عطف ، تابع ممکن است مشتق پذیر باشد یا نباشد . اگر تابع مشتق پذیر باشد، منحنی در نقطهٔ عطف یک خط مماس غیرقائم دارد و اگر تابع مشتق پذیر نباشد، منحنی در نقطهٔ عطف دارای مماس قائم است.

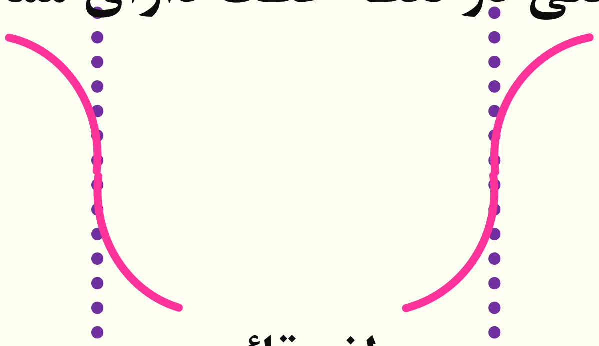


عطف مایل



عطف افقی

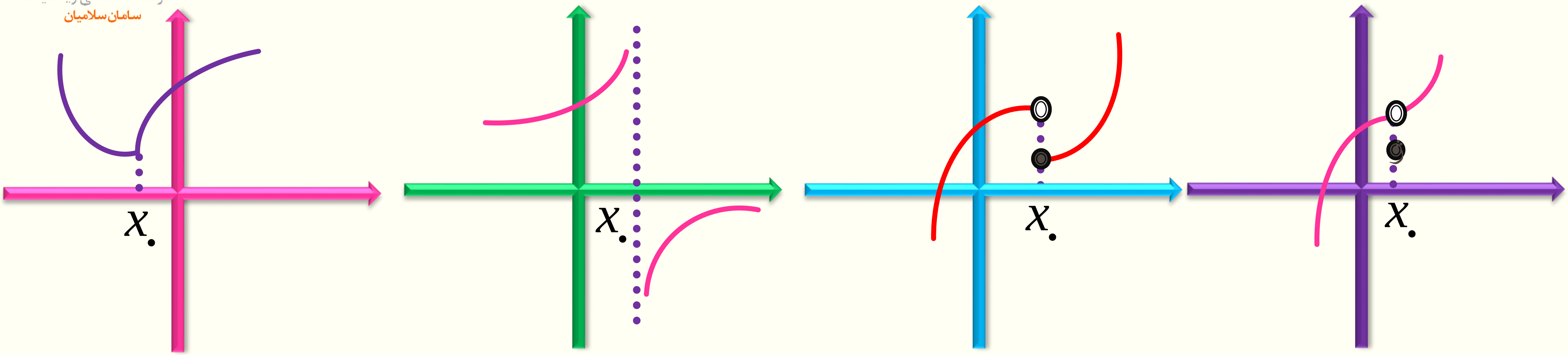
تابع درنقطهٔ عطف مشتق پذیر است.



عطف قائم

تابع درنقطهٔ عطف مشتق پذیر نیست.

در شکل های زیر تقعر منحنی در نقطهٔ $x_{\circ}$ تغییر می کند، اما هیچ کدام نقطهٔ عطف منحنی نیستند.



تابع $f(x)=(x^{۲}-۱)^{۲}$ چند نقطهٔ عطف دارد ؟

راه اول : مشتق دوم تابع را پیدا و تعیین علامت می کنیم :

ریشه های f'' برابرند با $x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $x=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و جدول تعیین علامت f'' به صورت زیر است :

$$f'(x)=۴x(x^{۲}-۱)\Rightarrow f''(x)=۴(x^{۲}-۱)+۲x(۴x)=۴(۳x^{۲}-۱)$$

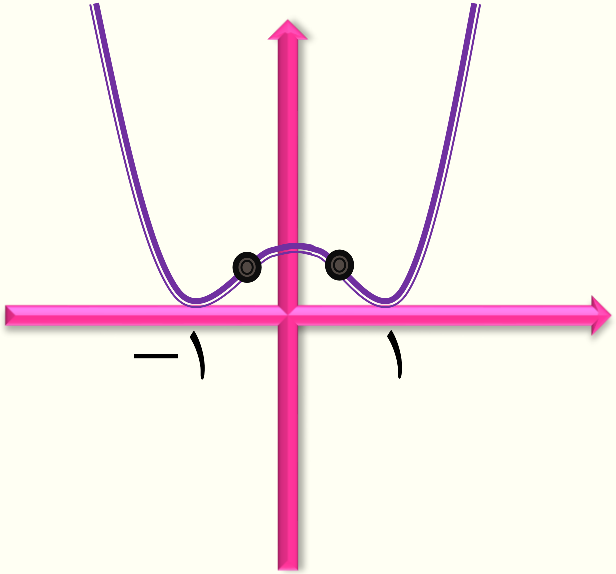
x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$		$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$+\infty$
f''	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$

بنابراین نقاط به طول $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ هر دو نقطهٔ عطف هستند.

@samansalamian

راه دوم :

منحنی تابع را رسم می کنیم :



با توجه به شکل دو نقطهٔ عطف داریم :

$$y=(x^{۲}-۱)^{۲}=(x-۱)^{۲}(x+۱)^{۲}$$

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

دقت کنید که برای پیدا کردن نقطهٔ عطف لازم نیست حتماً f'' را تعیین علامت کنیم. کافی است مطمئن باشیم که f'' در آن نقطه تغییر علامت می دهد، یعنی آن نقطه ریشهٔ مرتبهٔ فرد f'' باشد. البته باید همیشه حواسمان به پیوستگی و وجود خط مماس در نقطهٔ موردنظر هم باشد. در مثال های بعدی قصد دارم بدون تعیین علامت f'' به جواب رساندن را به شما آموزش دهم.

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

طول نقطهٔ عطف منحنی $y=۲x-\sqrt[۳]{x-۱}$ را بدست آورید.

راه یک : دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است و تابع در تمام نقاط پیوسته است ، مشتق دوم تابع را پیدا می کنیم :

X=۱ ریشهٔ مرتبه فرد مخرج y'' است، پس y''در x=۱ تغییر علامت می دهد. از طرفی مشتق در x=۱ بی نهایت می شود، پس خط مماس قائم داریم (چون تابع در x=۱ پیوسته است) بنابراین x=۱ طول نقطهٔ عطف تابع است.

$$y'=۲-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x-۱)^{۲}}} \Rightarrow y''=\frac{۲}{۹\sqrt[۳]{(x-۱)^{۵}}}$$

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

راه دو : عامل x^2 در طول نقطهٔ عطف موثر نیست و از قبل داشتیم که توابع رادیکالی با فرجهٔ فـرد در ریشـه هـای عبارت زیر رادیکال که مرتبهٔ فرد کوچکتر از فرجه دارند عطف قائم دارد. پس این تابع در $x=1$ عطف دارد.

تابع $f(x)=x^{۲}+۲\cos x$ چند نقطهٔ عطف دارد ؟

مشتق اول تابع برابر $f'(x)=۲x-۲\sin x$ و مشتق دوم تابع برابر $f''(x)=۲-۲\cos x=۲(۱-\cos x)$ است و چون همواره $۱-\cos x\geq ۰$ است، پس f'' همواره نامنفی است و منحنی نقطهٔ عطف ندارد.

دقت کنید که در توابع چند جمله ای ، گویا ، مثلثاتی و نمایی ریشه های مرتبهٔ فرد مشتق دوم طول نقاط عطف هستند. به بیان ساده تر اگر تابع مشکل مشتق پذیری نداشته باشد می توانیم مطمئن باشیم که ریشه های مرتبهٔ فرد f'' طول نقاط عطف اند و ریشه های مرتبهٔ زوج f'' طول نقطهٔ عطف نیستند.

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

منحنی $f(x)=x^{۲}\left|x-۳\right|$ چند نقطهٔ عطف دارد ؟

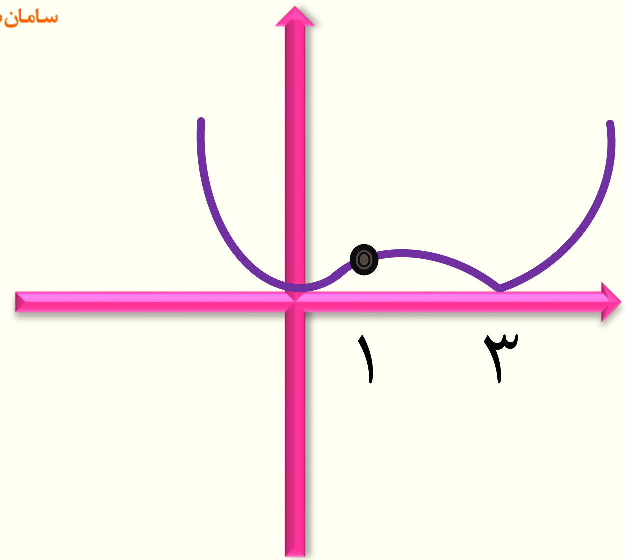
راه یک : قدرمطلق دیدی تعیین علامت کن و همانطور که قبلاً گفتم قدرمطلق درواقع دو تا تابع هست پس تــابع دو ضابطه ای جدید را نوشته و از آن مشتق بگیرید :

$$f(x)=\begin{cases} x^{۳}-۳x^{۲} & x\ge ۳ \\ -x^{۳}+۳x^{۲} & x<۳ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۳x^{۲}-۶x & x>۳ \\ -۳x^{۲}+۶x & x<۳ \end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases} ۶x-۶ & x>۳ \\ -۶x+۶ & x<۳ \end{cases}$$

ضابطهٔ بالایی f'' به ازای (x>۳) همواره مثبت است و ضابطهٔ پایینی در x=۱ تغییر علامت می دهد. پــس x=۱ طــول نقطهٔ عطف منحنی است.

راه دو :

همیشه گفتم که فایل رسم در ذهنتان باز باشد پس نمودار تابع را رسم می کنیم :



$$y = x^{۲}\left|x - ۳\right|$$

از روی نمودار دیده می شود که تقعر تابع در دو نقطه عوض می شود که فقط یکی از آن ها نقطهٔ عطف است.

طول نقاط عطف منحنی $f(x)=\frac{۱}{x}e^{-x^{۲}}$ را بدست آورید.

مشتق اول و دوم تابع را پیدا می کنیم :

$$f'(x)=-\frac{۱}{x^{۲}}e^{-x^{۲}}+(-۲x)e^{-x^{۲}}(\frac{۱}{x})=(-\frac{۱}{x^{۲}}-۲)e^{-x^{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{۲}{x^{۳}}e^{-x^{۲}}+(-۲x)e^{-x^{۲}}(-\frac{۱}{x^{۲}}-۲)=۲e^{-x^{۲}}(\frac{۱}{x^{۳}}+\frac{۱}{x}+۲x)=۲(\frac{۲x^{۴}+x^{۲}+۱}{x^{۳}})e^{-x^{۲}}$$

در f'' عامل های $۲x^{۴}+x^{۲}+۱$ و $e^{-x^{۲}}$ همواره مثبت اند و f'' فقط در $x=۰$ ریشهٔ مخرج f'' ، تغییر علامت

می دهد. اما $x=۰$ نقطهٔ عطف نیست، چون دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-\{۰\}$ است.

تقعر منحنی تابع وارون :

رابطهٔ مشتق دوم تابع معکوس به شکل $(f^{-1}(f(x)))'' = \dfrac{-f''(x)}{(f'(x))^{3}}$ بود.

از این رابطه نتیجه می گیریم ، جهت تقعر در هر نقطه از تابع معکوس ، وابسته به علامت f' و f'' در نقطهٔ متناظر آن است و می توان گفت :

الف) اگر تابع f در بازهٔ I صعودی باشد، رفتار تقعر f و f^{-1} در بازه های متناظر عکس یکدیگر است .

ب) اگر تابع f در بازهٔ I نزولی باشد، رفتار تقعر f و f^{-1} در بازه های متناظر مثل یکدیگر است.

اگر $f(x) = x^3 + 3x + 5$ ، تابع f^{-1} در چه بازه ای تقعری به سمت بالا دارد ؟

۱) $(-\infty, 3)$ ۲) $(5, +\infty)$ ۳) $(-\infty, 0)$ ۴) $(-\infty, 5)$

اکیداً صعودی

$$f(x) = 3x^2 + 3 > 0$$

اول باید مشخص کنیم f صعودی است یا نزولی .

در نتیجه رفتار تقعر f و f^{-1} در بازه های متناظر عکس هم است، پس به دنبال بازه ای می گردیم که در آن f تقعری رو به پایین داشته باشد.

	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f			

f در بازهٔ $(-\infty, 0)$ تقعری به سمت پایین دارد، در نتیجه f^{-1} در بازهٔ متناظر آن $(-\infty, 5)$ تقعری به سمت بالا دارد.

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

ساما ن سلامیان :

اگه تمام تلاشتو واسه رسیدن به اهدافت به کارنگیری،
به زودی پشیمون می شی...
دقیقاً مثل زمانی که دیر می رسی به قطار و مجبوری
دست تکون دادن افراد سوار برقطار رو تماشا کنی...

@ samansalamian