تست

اگر بخواهیم با روش نصف کردن معادله $2x^2 - \sin x = 0$ را حل کنیم و جواب تا ۲ رقم اعشار مدنظر باشد(تقریب کمتر از ۰/۰۱) حداقل تعداد نصف کردن ها در بازهٔ $[0/4, 0/6]$ کدام است ؟

گزینه ها

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ

$$\frac{b-a}{۲^n} < \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\frac{۰/۶-۰/۴}{۲^n} < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۰/۲}{۲^n} = \frac{\cancel{۲}}{(۱۰)\cancel{۲}^n} = \frac{۱}{\cancel{۱۰}(۲^{n-۱})} < \frac{۱}{۱۰\cancel{۰}}$$

$$۲^{n-۱} > ۱۰$$

n کمترین $= ۵$

❖ نکتهٔ ۱ : دقت کنید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ صعودی و کراندار و دنبالهٔ $\{b_n\}$ نزولی و کراندارند و حدّ آن ها یکسان است،مقدار این حد،همان ریشه، همان $f(x)=0$ است.

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

- نکتهٔ ۲ : در بسیاری از محاسبات ارقام اعشاری بدست آمده بیش از مقدار مورد نظر است.معمولاً برای حذف این ارقام اضافی از روش گردش استفاده می شود. به این ترتیب که اگر اولین رقمی که حذف می شود، ۰ تا ۴ باشد در آخرین رقمی که باقی می ماند هیچ تغییری نمی دهیم و در صورتی که اولین رقمی که حذف می شود، ۵ تا ۹ باشد به آخرین رقمی که می ماند ۱ واحد اضافه می کنیم.

مثال

الف) اعداد ۳/۴۵۰۲۹۶ و ۴/۲۸۷۱۴۸ که به ترتیب تا سه رقم اعشار، چهار رقم اعشار و پنج رقم اعشار گرد شده اند را در زیر مشاهده می کنید.

۳/۴۵و۳/۴۵۰۳و۳/۴۵۰۳۰ ۴/۲۸۷و۴/۲۸۷۲و۴/۲۸۷۱۵

ب) دو عدد ۲/۷۴۴ و ۲/۷۳۵ در صورتی که تا دو رقم اعشار گرد شوند، نتیجهٔ یکسان ۲/۷۴ را خواهند داد.

❖ نکتهٔ ۳ : در روش نصف کردن اگر هدف یافتن جواب با دقت k رقم اعشار باشد، هنگامی که گرد شدهٔ اعداد a_n و b_n یعنی گرد شدهٔ دو سر بازه ای که ریشه در آن قرار دارد در k رقم اعشار با یکدیگر برابرشدند محاسبات را متوقف نموده و ریشه را برابر مقدار گرد شدهٔ آن ها می گیریم.

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

تست

اگر ریشه های معادله $2x^2 - \sin x = 0$ در بازهٔ $[0/4, 0/6]$ مدنظر باشد ریشهٔ تقریبی معادله با تقریب کمتر از ۰/۰۱ در کدام بازهٔ زیراست ؟

گزینه ها

۱) $[0/475, 0/5]$
۲) $[0/472, 0/478]$
۳) $[0/475, 0/482]$
۴) $[0/476, 0/5]$

SPECIALIZED SCHOOL OF MATHEMATICS
Salamian
مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

پاســخ

جواب در بازه ای است که گرد شدهٔ اعداد دو سرش با تقریب مورد نظر مسئله یکی شوند و چون در گزینهٔ ۳ گرد شدهٔ اعداد دو سر بازه هر دو ۰/۴۸ است، این عدد را به عنوان ریشهٔ معادله گزارش می کنیم. ضمناً هر عددی در این بازه می تواند ریشهٔ معادله با تقریب کمتر از ۰/۰۱ باشد.

مثال

می خواهیم ریشهٔ معادلهٔ $۲x^۲ - \sin x = ۰$ را با دقت دو رقم اعشار حساب کنیم،جدول زیر نتایج محاسبه ها را در مراحل مختلف نشان می دهد.

توجه کنید که در مرحلهٔ ششم،$a_۶$و$b_۶$هر دو، تا دو رقم اعشار برابر ۰/۴۸ بوده و در نتیجه می گوییم مقدار ریشه با دقت دو رقم اعشار (یا با تقریب کمتر از ۰/۰۱) برابر ۰/۴۸ است.

SPECIALIZED SCHOOL OF MATHEMATICS
Salamian
مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

n	a_n	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	c_n	$f(c_n)$
۱	۰/۴	۰/۶	−۰/۰۶۹	۰/۱۵۵	۰/۵	۰/۰۲۱
۲	۰/۴	۰/۵	−۰/۰۶۹	۰/۰۲۱	۰/۴۵	−۰/۰۳۰
۳	۰/۴۵	۰/۵	−۰/۰۳۰	۰/۰۲۱	۰/۴۷۵	−۰/۰۰۶
۴	۰/۴۷۵	۰/۵	−۰/۰۰۶	۰/۰۲۱	۰/۴۸۸	۰/۰۰۶
۵	۰/۴۷۵	۰/۴۸۸	−۰/۰۰۶	۰/۰۰۶	۰/۴۸۲	۰/۰۰۰۱
۶	۰/۴۷۵	۰/۴۸۲				

در جدول بالا به موارد زیر دقت کنید :

۱- ستون اول تعداد مراحل نصف کردن است و تا جایی ادامه می یابد که گرد شدهٔ اعداد دو سر بازه با تقریب مورد نظر مسئله برابر شود.

۲- ستون a_n اعداد سربازه ای است و ستون b_n اعداد ته بازه ای،که دنبالهٔ a_n صعودی و b_n نزولی و هردو همگرا به ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ هستند.

۳– در تمام مراحل ضرب اعداد ستون $f(a_n)$ و $f(b_n)$ طبق قضیهٔ بولتزانو منفی است.

۴– c_n اعداد وسط هر زیربازه در هر مرحله است که دنباله ای همگرا به ریشه است.

۵– ستون $f(c_n)$ عرض نقاط وسط هر زیر بازه است که همگراست به صفر.

۶– طول بازه در هر مرحله $\frac{b-a}{۲^n}$ است که با افزایش n آنقدر بازه کوچک و تنگ می شود تا به ریشهٔ معادله برسیم.