۱. **درجه :** زاویهٔ مرکزی که از هر دایره به اندازهٔ $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط همان دایره را جدا می کند.

رادیان : زاویهٔ مرکزی که از هر دایره به اندازهٔ شعاع ، محیط همان دایره را جدا می کند.

تبدیل درجه و رادیان به هم : درجه $\underset{\times\frac{۱۸۰}{\pi}}{\overset{\times\frac{۱}{۱۸۰}}{\rightleftarrows}}$ رادیان

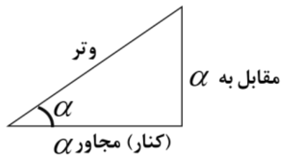
۲. **محاسبه طول کمان :** $L=R\theta$ طول کمان مقابل به زاویهٔ مرکزی θ (رادیان) در دایره ای به شعاع R

۳. **مساحت قطاع :** $S=\frac{۱}{۲}R^{۲}\theta \xrightarrow{\theta=\frac{L}{R}\rightarrow L=R\theta} \frac{۱}{۲}R\underbrace{(R\theta)}_{L}=\frac{۱}{۲}RL$

۴. **نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه :**

$$\tan\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \qquad \sin\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\cot\alpha=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} \qquad \cos\alpha=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$



۵. **نسبت های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی :** (دایره ای به شعاع واحد و پاد ساعتگرد) :

$\sin \longrightarrow$ محور عرض ها (y ها) اسیر بین $[-۱,۱]$

$\tan \longrightarrow$ موازی محور عرض ها (y ها) آزاد که از روی $x=۱$ شروع میشه (همون خط $x=۱$)

$\cos \longrightarrow$ محور طول ها (x ها) اسیر بین $[-۱,۱]$

$\cot \longrightarrow$ موازی محور طول ها (yها) آزاد که از روی $y=۱$ شروع میشه (همون خط $y=۱$)

۶. **علامت های نسبت های مثلثاتی :**

ناحیهٔ اول همه مثبت ، ناحیهٔ دوم فقط $\sin$ مثبت ، ناحیهٔ سوم $\tan$ مثبت پس $\cot$ مثبت ، ناحیهٔ چهارم فقط $\cos$ مثبت.

※ اگر انتهای کمان θ در ناحیهٔ اول یا سوم باشد ، $\sin\theta$ و $\cos\theta$ هم علامت اند ، لذا $\tan\theta$ و $\cot\theta$ مثبت اند.

※ اگر انتهای کمان θ در ناحیهٔ دوم یا چهارم باشد ، $\sin\theta$ و $\cos\theta$ مختلف العلامت اند، لذا $\tan\theta$ و $\cot\theta$ منفی اند.

۷. جدول نسبت های مثلثاتی چند زاویهٔ مهم :

θ / نسبت	30° $\frac{\pi}{6}$	60° $\frac{\pi}{3}$	45° $\frac{\pi}{4}$	0° 0	90° $\frac{\pi}{2}$	180° π	270° $\frac{3\pi}{2}$	360° 2π
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	-1	0	1
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	1	0	ت.ن	0	ت.ن	0
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	ت.ن	0	ت.ن	0	ت.ن

۸. خواص زاویه های مختلف :

۱) دو زاویهٔ قرینه : cos های برابر دارند و بقیه نسبت ها قرینه هستند. به خاطر همین میگیم cos منفی خوره و بقیه منفی انداز.

$$\cos 20 = \cos(-20) \qquad \sin(-20) = -\sin 20$$

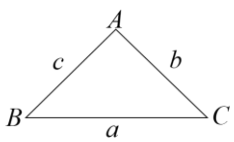
۲) دو زاویهٔ مکمل $(\alpha+\beta=\pi)$ **:** sin های برابر دارند و بقیه نسبت ها قرینه هستند.

$$\begin{cases} \sin 30 = \sin 150 \quad , \quad \tan 20 = -\tan 160 \\ \sin\alpha = \sin\beta \quad , \quad \tan\alpha = -\tan\beta \ , \ \cos\alpha + \cos\beta = 0, \dots \end{cases}$$

۳) دو زاویهٔ متمم $(\alpha+\beta=\frac{\pi}{2})$ **:** نسبت هاشون ضربدری هستند به **۳۰** و **۶۰** در جدول بالای صفحه نگاهی بیندازید.

$$\sin\alpha = \cos\beta \quad , \quad \tan\alpha = \tan\beta$$

۹. چند قانون مهم در مثلث (هر مثلثی) :



$$1)\begin{cases} AB = a\cos B + b\cos A \\ AC = a\cos C + c\cos A \\ BC = b\cos C + c\cos B \end{cases}$$

۲) قضیهٔ سینوس ها : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

۳) قضیهٔ کسینوس ها : $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$

۱۰. تعیین مساحت مثلث به سه روش :

۱) نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع $\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}ah$

۲) نصف حاصل ضرب دو ضلع درسینوس زاویهٔ بین همین دو ضلع $S=\frac{۱}{۲}ab\sin\theta$

۳) نصف محیط $P=\frac{a+b+c}{۲}$ $\Rightarrow$ مساحت مثلث $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\Rightarrow$ در مسائلی که طول اضلاع گویا باشند.

۱۱.تعیین مساحت متوازی الاضلاع : از اونجایی که متوازی الاضلاع دو تا مثلث به هم چسبیده است پس در نکتهٔ **۱۰** کافیه کلمهٔ نصف رو از شماره های **۱** و **۲** حذف کنیم.

طول دو ضلع متوازی الاضلاع $a,b\Rightarrow S=ab\sin\theta \xrightarrow[a=b]{\text{لوزی}} S=a^{۲}\sin\theta$

۱۲. تعیین مساحت ۴ ضلعی محدب با قطرها و زاویهٔ بین قطرهای معلوم :

زاویهٔ بین θ, دو قطر $L_{۲},L_{۱}\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}L_{۱}L_{۲}\sin\theta \xrightarrow[\theta=۹۰^\circ]{\text{لوزی}} S=\frac{۱}{۲}L_{۱}L_{۲}$

۱۳. نسبت های مثلثاتی $-\alpha$ و $\pi\pm\alpha$:

$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$

تذکر : دقت کنید مضارب صحیح زوج π مانند صفر عمل می کنند و مضارب صحیح فرد π مانند π عمل می کنند.

مثال $\begin{cases}\sin(۲k\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(۱۳۹۹\pi-\alpha)=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\end{cases}$

۱۴. نسبت های مثلثاتی : زوایای $\frac{\pi}{۲}\pm\alpha$ و $\frac{۳\pi}{۲}\pm\alpha$ و ... به طور کلی در محاسبهٔ نسبت های مثلثاتی $\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha$ که k عددی فرد باشد، بر اساس قوانین مربوط به دو زاویهٔ متمم نوع نسبت مثلثاتی تغییر می کند مثلاً $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$ و $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cos\alpha$ و ... برای تشخیص علامت + یا − در روابط صفحهٔ بعد مانند نکتهٔ (**۱۳**) از علامت نسبت های مثلثاتی در نواحی مختلف دایرهٔ مثلثاتی استفاده می کنیم. (می توانید α را در ربع اول فرض کنید).

فرض : ربع اول $\frac{\pi}{2}-\alpha$	فرض : ربع دوم $\frac{\pi}{2}+\alpha$	فرض : ربع سوم $\frac{3\pi}{2}-\alpha$	فرض : ربع چهارم $\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cos\alpha$
$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=\sin\alpha$
$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$
$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$	$\cot(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$

تذکر : خاطرتان باشد $\frac{5\pi}{2}$ و $\frac{9\pi}{2}$ و... مانند $\frac{\pi}{2}$ عمل می کنند و $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{2}$ و ... مانند $\frac{3\pi}{2}$ عمل می کنند. (با توجه به نقاط بالا و پایین دایرهٔ مثلثاتی در برخورد با محور y ها)

۱۵. روابط مثلثاتی :

$$1)\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\\[2mm] \cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\end{cases}\Rightarrow \tan\theta.\cot\theta\Rightarrow\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}\\[2mm] \cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}\end{cases}$$

$$2)\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow\begin{cases}\sin^2\theta=1-\cos^2\theta\\ \cos^2\theta=1-\sin^2\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}\Rightarrow\\ \cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}\Rightarrow\end{cases}$$

علامت مثبت برای θ درناحیهٔ اول و دوم وعلامت منفی برای θ در ناحیهٔ سوم و چهارم است.

علامت مثبت برای θ درناحیهٔ اول وچهارم وعلامت منفی برای θ در ناحیهٔ دوم و سوم است.

$$\begin{cases}\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{\sin^2\theta}=|\sin\theta|=\begin{cases}\sin\theta & \text{در ربع اول و دوم } \theta\\ -\sin\theta & \text{در ربع سوم و چهارم } \theta\end{cases}\\[4mm] \sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|=\begin{cases}\cos\theta & \text{در ربع اول و چهارم } \theta\\ -\cos\theta & \text{در ربع دوم و سوم } \theta\end{cases}\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\Rightarrow\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta}\\[3mm] 1+\cot^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}\Rightarrow\sin^2\theta=\dfrac{1}{1+\cot^2\theta}=\dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}=\dfrac{1}{|\cos\theta|}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\cos\theta} & \text{در ربع اول و چهارم } \theta\\[2mm] -\dfrac{1}{\cos\theta} & \text{در ربع دوم و سوم } \theta\end{cases}\\[6mm] \sqrt{1+\cot^2\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\theta}}=\dfrac{1}{|\sin\theta|}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta} & \text{در ربع اول و دوم } \theta\\[2mm] -\dfrac{1}{\sin\theta} & \text{در ربع سوم و چهارم } \theta\end{cases}\end{cases}$$

$$۴)\begin{cases}\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha \xrightarrow{\text{کمان نصف می شود}} \sin x = ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}\\ \sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha \xrightarrow{\text{کمان ۲ برابر می شود}} \sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲} = \frac{۱}{۲}\sin x\end{cases}$$

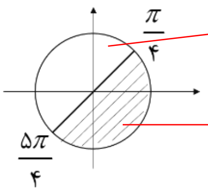
مثال ۱)

$$\begin{cases}\sin ۲۰^\circ = ۲\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ\\ \sin ۳x\cos ۳x = \frac{۱}{۲}\sin ۶x\\ \sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ = \frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}\end{cases}$$

$$۵)\begin{cases}\dfrac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x} = \sin ۲x \Rightarrow \sin x = \dfrac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}\\[2ex] \dfrac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} = \tan ۲x \Rightarrow \tan x = \dfrac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}\end{cases}$$

$$۶)\begin{cases}(\sin x\pm\cos x)^۲ = ۱\pm ۲\sin x\cos x = ۱\pm\sin ۲x\\ \sqrt{۱\pm\sin ۲x} = \sqrt{(\sin x\pm\cos x)^۲} = |\sin x\pm\cos x|\end{cases}$$

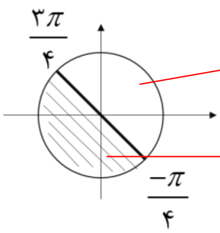
یادداشت : برای حذف قدرمطلق در رابطهٔ بالا باید با توجه به دایرهٔ مثلثاتی زیر به علامت $\sin x\pm\cos x$ **توجه کنید.**



$\sin x > \cos x \Rightarrow \sin x - \cos x > ۰$

$\cos x > \sin x \Rightarrow \sin x - \cos x < ۰$

یادداشت : برای به خاطر سپردن نامساوی های مقابل ، یک زاویه در ناحیهٔ موردنظر امتحان کنید!!



$\sin x + \cos x > ۰$

$\sin x + \cos x < ۰$

رابطه ای خارج از کتاب اما مفید !! $\Rightarrow \sin x\pm\cos x = \sqrt{۲}\sin(x\pm\frac{\pi}{۴})$

$$\begin{cases}\sin ۱۵^\circ - \sin ۷۵^\circ = \sin ۱۵^\circ - \cos ۱۵^\circ = \sqrt{۲}\sin(\underbrace{۱۵^\circ - ۴۵^\circ}_{-۳۰^\circ}) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \sin ۱۶۵^\circ.\sin ۷۵^\circ = \sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ = \frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۴}\end{cases}$$

$$۷)\begin{cases}\tan\alpha+\cot\alpha=\dfrac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha}=\dfrac{۲}{\sin ۲\alpha}\\ \tan\alpha-\cot\alpha=-۲\cot ۲\alpha\xrightarrow{\text{مثال}}\tan\dfrac{x}{۲}-\cot\dfrac{x}{۲}=-۲\cot x\end{cases}$$

$$۸)\begin{cases}\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=۱-\dfrac{۲}{۴}\sin^۲ ۲\alpha=۱-\dfrac{۱}{۲}\sin^۲ ۲\alpha\\ \sin^۴\alpha-\cos^۴\alpha=\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha=-\cos ۲\alpha\end{cases}$$

یادداشت : برای حفظ کردن این روابط نگران نباشید! کافی است اتحادهای فرعی جبری را مسلط باشید.

$$۹)\begin{cases}\sin^۶\alpha+\cos^۶\alpha=۱-۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=۱-\dfrac{۳}{۴}\sin^۲ ۲\alpha\\ \sin^۶\alpha-\cos^۶\alpha=(\underbrace{\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha}_{-\cos ۲\alpha})^۳+۳\underbrace{\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}_{\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲\alpha}\end{cases}$$

$$۱۰)\begin{cases}\sin^۳\alpha\pm\cos^۳\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)(۱\mp\sin\alpha\cos\alpha)\Rightarrow ۲\alpha\ \text{قابل تبدیل به}\\ \sin^۳\alpha\pm\cos^۳\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^۳\mp۳(\sin\alpha\pm\cos\alpha)\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$$

نکته : وجه اشتراک روابط **۴** تا **۱۰** ، عبارت $\sin ۲\alpha$ است ، پس با داشتن یک رابطه و محاسبهٔ $\sin ۲\alpha$ از آن می توان مقدار رابطهٔ دیگر را محاسبه کرد.

$$۱۱)\cos ۲\alpha=\begin{cases}\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha\xrightarrow{\text{برابر با}}\cos^۴\alpha-\sin^۴\alpha\\ ۱-۲\sin^۲\alpha\\ ۲\cos^۲\alpha-۱\\ \dfrac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}\end{cases}$$

اینکه از کدام رابطه برای محاسبهٔ $\cos ۲\alpha$ استفاده شود ، به دادهٔ مسئله و دیگر اطلاعات مسئله بستگی دارد. نتایج زیر از رابطهٔ (**۱۱**) گرفته شده است :

روابط طلایی : $\begin{cases}۱+\cos ۲\alpha=۲\cos^۲\alpha\\ ۱-\cos ۲\alpha=۲\sin^۲\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱+\cos\alpha=۲\cos^۲\dfrac{\alpha}{۲}\\ ۱-\cos\alpha=۲\sin^۲\dfrac{\alpha}{۲}\end{cases}$

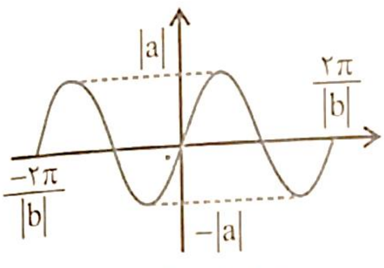
روابط توان شکن : $\begin{cases}\sin^۲\alpha=\dfrac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}\\ \cos^۲\alpha=\dfrac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}\end{cases}$

$$\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۱-\cos ۲\alpha}=\frac{۲\cos^{۲}\alpha}{۲\sin^{۲}\alpha}=\cot^{۲}\alpha$$ (مثال ۳

$$\frac{۱-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}\xrightarrow{\text{با روابط طلایی}}\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}=\tan\frac{\alpha}{۲}$$ (مثال ۴

.۱۶

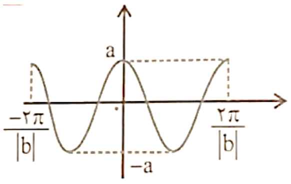
(اگر $ab<۰$ باشد نمودار نسبت به محور x ها قرینه شده و در $x=۰$ نزولی می شود.)



$y=a\sin bx\,;\,(a,b>۰)$

$f(x)=a\sin bx+c\Rightarrow$

- $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ دوره تناوب اصلی
- در کل غیریکنواست ، و غیر یک به یک
- در بازه هایی خاص می تواند یک به یک و اکیداً یکنوا باشد.
- $a>۰\Rightarrow\begin{cases}\sin bx=۱\Rightarrow \text{بیشترین مقدار تابع}=a+c\\ \sin bx=-۱\Rightarrow \text{کمترین مقدار تابع}=-a+c\end{cases}$
- $a<۰\Rightarrow\begin{cases}\sin bx=-۱\Rightarrow \text{بیشترین مقدار تابع}=-a+c\\ \sin bx=+۱\Rightarrow \text{کمترین مقدار تابع}=a+c\end{cases}$
- برد $=[-|a|+c,|a|+c]$
- $ab>۰\Rightarrow$ در نقطهٔ برخورد با محور y ها $(x=۰)$ نمودار تابع اکیداً صعودی است.
- $ab<۰\Rightarrow$ در نقطهٔ برخورد با محور y ها $(x=۰)$ نمودار تابع اکیداً نزولی است.
- $f(۰)=c$
- $|a|=\frac{\max-\min}{۲}\Rightarrow \max-\min=۲|a|$
- $c=\frac{\max+\min}{۲}$

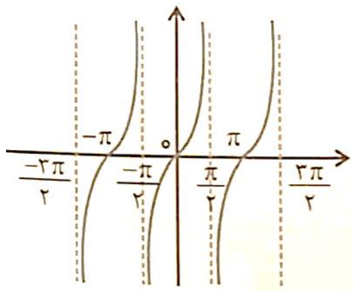


$y=a\cos bx \quad a>۰$

۱۷. (اگر $a<۰$ باشد نمودار نسبت به محور x ها قرینه می شود و در $x=۰$ رو به بالا خواهد بود.)

$$f(x)=a\cos bx+c\Rightarrow\begin{cases} T=\dfrac{۲\pi}{|b|} \text{ دوره تناوب اصلی} \\ \text{در کل غیریکنوا و غیر یک به یک} \\ \text{در بازه هایی خاص می تواند اکیداً یکنوا و یک به یک باشد.} \\ \text{مثبت یا منفی بودن } b \text{ هیچ تأثیری ندارد چون } \cos(-\alpha)=\cos\alpha \text{ است.} \\ a>۰\Rightarrow\begin{cases}\cos bx=+۱\Rightarrow \max=a+c \\ \cos bx=-۱\Rightarrow \min=-a+c\end{cases} \\ a<۰\Rightarrow\begin{cases}\cos bx=-۱\Rightarrow \max=-a+c \\ \cos bx=+۱\Rightarrow \min=a+c\end{cases} \\ f(۰)=a+c \\ a>۰\Rightarrow \text{ در نقطهٔ برخورد با محور } y \text{ ها } (x=۰) \text{ نمودار رو به پایین} \\ a<۰\Rightarrow \text{ در نقطهٔ برخورد با محور } y \text{ ها } (x=۰) \text{ نمودار رو به بالا} \\ f(۰)=c \\ |a|=\dfrac{\max-\min}{۲}\Rightarrow \max-\min=۲|a| \\ c=\dfrac{\max+\min}{۲}\end{cases}$$

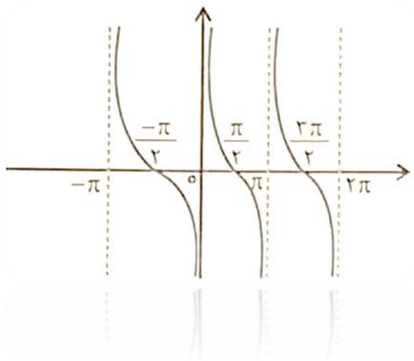
۱۸.



$$y=\tan x\Rightarrow\begin{cases} \text{دوره تناوب}: T=\pi \\ \text{دامنه}: \mathbb{R}-\left\{(۲k+۱)\dfrac{\pi}{۲}\right\} \\ \text{برد}: \mathbb{R}\Rightarrow(-\infty,+\infty) \\ \text{در کل یکنوا ، اما در هر قطعه پیوسته (بین دو مجانب قائم) ، اکیداً صعودی}\end{cases}$$

$$\underset{\text{به طور کلی}}{y=a\tan bx}\Rightarrow\begin{cases} \text{دوره تناوب}: T=\dfrac{\pi}{|b|} \\ bx\neq(۲k+۱)\dfrac{\pi}{۲}\Rightarrow x\neq\dfrac{(۲k+۱)\pi}{۲b} \\ \text{برد}: (-\infty,+\infty) \text{ در کل غیر یکنوا} \\ ab>۰\Rightarrow \text{در هر قطعه پیوسته اکیداً صعودی} \\ ab<۰\Rightarrow \text{در هر قطعه پیوسته اکیداً نزولی}\end{cases}$$

۱۹.



$$y=\cot x \Rightarrow \begin{cases} \text{دوره تناوب}: T=\pi \\ \text{دامنه}: \mathbb{R}-\{k\pi\} \\ \text{برد} = (-\infty,+\infty) \\ \text{در کل غیر یکنوا ، اما در هر قطعه پیوسته ، اکیداً نزولی} \end{cases}$$

$$\underset{\text{به طور کلی}}{y=a\cot bx} \Rightarrow \begin{cases} \text{دوره تناوب}: T=\dfrac{۲\pi}{|b|} \\ bx\neq k\pi \Rightarrow x\neq \dfrac{k\pi}{b} \\ \text{برد} = (-\infty,+\infty) \\ ab>۰ \Rightarrow \text{در هر قطعه پیوسته اکیداً نزولی} \\ ab<۰ \Rightarrow \text{در هر قطعه پیوسته اکیداً صعودی} \end{cases}$$

۲۰. حل معادلات مثلثاتی :

$$۱)\ \sin u=\sin\alpha \xrightarrow[k\in\mathbb{Z}]{\text{دو مجموعه جواب کلی}} \begin{cases} u=۲k\pi+\alpha \\ \text{مضارب زوج پی به اضافهٔ آلفا !!} \\ u=(۲k+۱)\pi-\alpha \xrightarrow{\text{همان}} ۲k\pi+\pi-\alpha \\ \text{مضارب فرد پی منهای آلفا !!} \end{cases}$$

$$\text{موارد خاص} \xrightarrow{\text{یک مجموعه جواب}} \begin{cases} \sin u=۰ \Rightarrow u=k\pi \\ \sin u=۱ \Rightarrow u=۲k\pi+\dfrac{\pi}{۲} \\ \sin u=-۱ \Rightarrow u=۲k\pi-\dfrac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$۲)\ \cos u=\cos\alpha \xrightarrow{\text{دو مجموعه جواب}} u=۲k\pi\pm\alpha$$

$$\text{موارد خاص} \xrightarrow{\text{یک مجموعه جواب}} \begin{cases} \cos u=۰ \Rightarrow u=(۲k+۱)\dfrac{\pi}{۲} \ \text{ یا } \ (۲k-۱)\dfrac{\pi}{۲} \\ \cos u=۱ \Rightarrow u=۲k\pi \\ \cos u=-۱ \Rightarrow u=(۲k+۱)\pi \ \text{ یا } \ (۲k-۱)\pi \end{cases}$$

چند تیپ معادلهٔ مثلثاتی متداول $\sin$ و $\cos$:

$$1)\ a\sin^2 x+b\cos x+c=0 \xrightarrow[\sin^2 x=1-\cos^2 x]{\text{همسان سازی}} \cos x$$ معادلهٔ درجه دوم برحسب

$$2)\ a\cos^2 x+b\sin x+c=0 \xrightarrow[\cos^2 x=1-\sin^2 x]{\text{همسان سازی}} \sin x$$ معادلهٔ درجه دوم برحسب

$$3)\ a\sin^2 x+b\cos 2x+c=0 \xrightarrow[\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}]{\text{فرمول توان شکن}} \cos 2x$$ معادلهٔ درجه دوم برحسب

$$4)\ a\cos^2 x+b\cos 2x+c=0 \xrightarrow[\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}]{\text{فرمول توان شکن}} \cos 2x$$ معادلهٔ درجه دوم برحسب

$$5)\ a\sin x+b\cos 2x+c=0 \xrightarrow[\cos 2x=1-\sin^2 x]{\text{رابطهٔ طلایی}} \sin x$$ معادلهٔ درجه یک برحسب

$$6)\ a\cos x+b\cos 2x+c=0 \xrightarrow[\cos 2x=2\cos^2 x-1]{\text{رابطهٔ طلایی}} \cos x$$ معادلهٔ درجه یک برحسب

$$7)\begin{cases}\sin\alpha=\cos\beta \xrightarrow{\text{هم نوع سازی}} \sin\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)\Rightarrow \text{طبق معادلهٔ ۱ در نکتهٔ ۲۰} \\ \sin\alpha=-\cos\beta \xrightarrow{\text{هم نوع سازی}} \sin\alpha=\sin(\frac{3\pi}{2}-\beta)\Rightarrow\end{cases}$$

$$8)\begin{cases}\sin^2 x=a \xrightarrow{0\le a\le 1} x=k\pi\pm\theta \xrightarrow{\text{مثال}} \sin^2 x=\frac{1}{4}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{6} \\ \theta \ \text{یکی از جواب های حاده} \\ \cos^2 x=a \xrightarrow{0\le a\le 1} x=k\pi\pm\theta\end{cases}$$

نکته : اگر در مدل معادلات (۷) ، کمان ها x و $2x$ باشند ، می توان بر روش همنوع سازی نسبت ها ، از روابط $\sin 2x$ و $\cos 2x$ نیز استفاده کرد.