۱ **میل کردن** $\Rightarrow \begin{cases} x \to a \Rightarrow & \text{یعنی } x \text{ به } a \text{ خیلی نزدیک شده است ولی با آن برابر نیست} \\ x \to a^{+} \Rightarrow & \text{یعنی } x \text{ با مقادیر بیشتراز } a \text{ (از راست) به } a \text{ نزدیک شده است} \\ x \to a^{-} \Rightarrow & \text{یعنی } x \text{ با مقادیر کمتر از } a \text{ (از چپ) به } a \text{ نزدیک شده است} \end{cases}$

۲

* توپر یا تو خالی بودن یک نقطه در نمودار تابع، در مقدار تابع اهمیت دارد ولی در حد تاثیری ندارد
* وقتی می‌گوییم $x \to a$ ، یعنی $x \neq a$ و نزدیک a است. توجه کنید اگر a عدد صحیح باشد، آن‌گاه $x \to a$ عددی غیر صحیح است.
* حاصل حد در صورت وجود، عددی یکتا و مشخص است.
* توابع به صورت $f(x) = \begin{cases} u(x) & x: \text{گویا} \\ v(x) & x: \text{گنگ} \end{cases}$ فقط در نقاطی حد دارند که $u(x) = v(x)$ باشد. اما در توابع $g(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \mathbb{Z} \\ v(x) & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ ، همواره حد در $x \to a$ از ضابطه $x \notin Z$ به دست می‌آید.

۳ وقتی تابع $f(x)$ در $x = a$ **حد دارد که** $\Leftarrow$

اولاً: در همسایگی دو طرف $x = a$ تعریف شده باشد (خود a مهم نیست!!) و دارای حد چپ و راست متناهی و مشخصی باشد.

ثانیاً: حد چپ و راست تابع در $x = a$ با هم برابر باشند.

نکته

* **در توابع چند ضابطه‌ای** $\Leftarrow$
  * **محاسبه حد راست** $(x \to a^{+}) \Leftarrow$ **از ضابطه مربوط به** $x > a$
  * **محاسبه حد چپ** $(x \to a^{-}) \Leftarrow$ **از ضابطه مربوط به** $x < a$
  * **مقدار تابع** $\Leftarrow$ **از ضابطه‌ای که** $x = a$ **را داشته باشد.**
* **اگر $f(x)$ در همسایگی راست $x = a$ تعریف نشده باشد $\Leftarrow$ f در $x = a$ حد راست ندارد $\Leftarrow$ در کل تابع در $x = a$ حد ندارد**
* **در حدود رادیکالی با فرجه زوج اگر زیر رادیکال صفر شد، برای بررسی داشتن حد حتماً حد چپ و راست را جداگانه بررسی می‌کنیم یا دامنه را مشخص می‌نماییم**

۴ اگر f و g در $x = a$ دارای حد باشند و $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ باشد، آن‌گاه توابع زیر در $x = a$ دارای حد هستند و مقدار آن‌ها به‌صورت زیر است:

۱) $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$

۲) $\lim_{x\to a}(f.g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \times L_2$

۳) $\lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2 \neq 0)$

۴) $\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n = L_1^n ; (n \in N)$

۵) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ (اگر n زوج باشد $\Rightarrow L_1 > 0$)

نکته

* اگر f و g هر دو در $x=a$ حد نداشته باشند، آن‌گاه ممکن است تابع حاصل از اعمال جبری روی این دو تابع در $x=a$ حد داشته باشد.

* f در $x=a$ حد دارد و g در x=a حد ندارد $\Leftarrow$
  - $f \pm g$ در $x=a$ حد ندارد.
  - $\frac{g}{f}$ در $x=a$ حد ندارد.
  - $f.g$ و $\frac{f}{g}$ ممکن است حد داشته باشند

* اگر f و g هر دو در $x=a$ حد داشته باشند، لزوماً fog در $x=a$ حد نداشته باشد، چرا که باید $f(x)$ در $x=\lim_{x\to a} g(x)$ دارای حد باشد.

۵ انواع صفر
* صفر واقعی (مطلق): در حد توابع ثابت و توابعی مانند جزء صحیح یا قدر مطلق که در بازه‌ای خاص ثابت هستند، رخ می‌دهد.
* صفر حدی: در ۹۹٪ بقیه موارد یا هر عدد دیگری که از حد به‌دست می‌آید، حدی است نه واقعی

نکته $\frac{\text{۰حدی}}{\text{۰حدی}}$ را مبهم می‌گوییم.

۶ در یک تابع گویا اگر $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{0}{0}$ شود، به این معنی است که صورت و مخرج دارای عامل صفر شونده $(x-a)$ یا توانی از آن هستند و باید با تجزیه این عامل را مشخص و سپس از صورت و مخرج ساده کنیم (به این کار رفع ابهام می‌گوییم.) سپس با عددگذاری $x=a$ حاصل حد به‌دست می‌آید.

نکته

* برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از فاکتورگیری، اتحاد مزدوج، جمله مشترک، چاق و لاغر و در صورت لزوم تقسیم کردن استفاده می‌کنیم.
* هر نقطه تو خالی به فرم $\not\circ$ که نمودار در همسایگی دو طرف آن تعریف شده باشد یک ابهام $\frac{0}{0}$ است، اما هر ابهام $\frac{0}{0}$ نقطه تو خالی نیست. (چون ممکن است پس از رفع ابهام $\infty=\frac{\text{عدد}}{0}$ شود.)

۷ قاعده هوپیتال : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\text{۰حدی}}{\text{۰حدی}}\xRightarrow{Hop}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (f' مشتق f و g' مشتق g است)

نکته

* هوپیتال فقط برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ است، نه حالت دیگری
* اگر زیر رادیکال صفر باشد، از هوپیتال استفاده نمی‌کنیم.
* ممکن است لازم باشد چند مرتبه از هوپیتال استفاده کنیم، یعنی پس از یک مرتبه Hop بازهم $\frac{0}{0}$ شود و مجدداً مشتق بگیریم.
* در مشتق‌گیری صورت و مخرج، فقط از عامل‌های صفر شونده مشتق می‌گیریم و در عامل‌های غیرصفر شونده فقط عددگذاری انجام می‌دهیم.

۸ $f(x)$ و $g(x)$ را در $x\to a$ هم‌ارز (معادل هم) می‌گوییم، هرگاه:

$$\begin{cases} f(a)=g(a)=0 \\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \end{cases} \Rightarrow \underset{x\to a}{f(x)} \overset{\text{هم‌ارز}}{\sim} \underset{x\to a}{g(x)}$$

۹ هم‌ارزی کم توان: هر چند جمله‌ای بر حسب x و فاقد عدد ثابت، وقتی $x\to 0$ هم‌ارز «x با کم‌ترین توان همراه با ضریب و علامت» است، یعنی هم‌ارز کوچکترین جمله

شرایط هم‌ارزی کم توان $\Leftarrow$
- شرط (۱): $x\to 0$
- شرط (۲): فاقد عدد ثابت

خلاصه نکات فصل نهم: حد و پیوستگی

۱۱ **هم‌ارزی عامل صفر شونده با کمترین توان:** گاهی $x \to 0$ و حد تابع $f(x)$ در $x \to a$ مد نظر است. $(a \neq 0)$ اما عامل صفر شونده $(x-a)$ همه جا دیده می‌شود، در این حالت می‌توان از $x-a$ با کم‌ترین توان فاکتور گرفت یا اینکه از هم‌ارزی عامل صفرشونده با کم‌ترین توان استفاده کرد.

۱۲ معمولاً مسائلی که با هم‌ارزی حل می‌کنیم با هوپیتال وقت گیرند، چون به تعداد مرتبه کم‌ترین توان باید هوپیتال گرفته شود.

۱۳ **هم‌ارزی برنولی:** شرایط $\Leftarrow$ $\begin{cases} u \to 0 \\ \text{عدد ثابت، ۱ است.} \end{cases}$ توان به پشت u منتقل شده است $\longrightarrow$ $(1 \pm u)^n \underset{u\to 0}{\sim} 1 \pm nu$

۱۴ **۶ روش تشخیص 0^+ یا 0^- (به طور کلی L^+ یا L^-):** کاربرد در حد توابع مرکب، چند ضابطه‌ای، قدر مطلقی، جزء صحیح‌دار و...

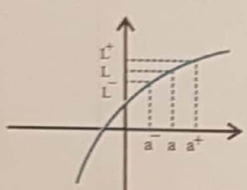
روش اول: شناسایی و شناخت عبارت‌هایی که همواره مثبت (یا صفر) و یا همواره منفی (یا صفر) هستند.

$$\left.\begin{array}{l} u^{2n} \geq 0 \\ |u| \geq 0 \\ \sqrt{u} \geq 0 \\ 1 \pm \sin u \geq 0 \\ 1 \pm \cos \geq 0 \end{array}\right\} 0^+ \qquad \left.\begin{array}{l} -u^{2n} \leq 0 \\ -|u| \leq 0 \\ -\sqrt{u} \leq 0 \\ \sin u - 1 \leq 0 \\ \cos u - 1 \leq 0 \end{array}\right\} 0^-$$

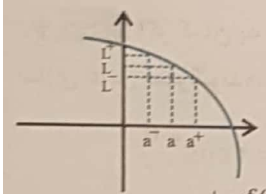
روش دوم: در صورت امکان ابتدا از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم و سپس 0^+ یا 0^- را تشخیص می‌دهیم.

روش سوم: استفاده از صعودی یا نزولی بودن تابع در همسایگی آن نقطه:

در تابع صعودی چپ و راست بودن a و L هماهنگ است. $\Leftarrow$ $\xrightarrow[f'(a)>0]{f(x)\text{ در } a \text{ صعودی}} \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L^+ \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L^- \end{cases}$

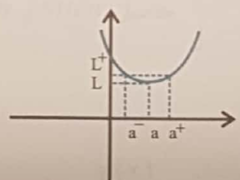


در تابع نزولی چپ و راست a و L ناهماهنگ است. $\Leftarrow$ $\xrightarrow[f'(a)<0]{f(x)\text{ در } a \text{ نزولی}} \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L^- \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L^+ \end{cases}$

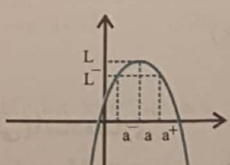


f(x) نزولی

$(f'(a)=0)$ در a مینیمم نسبی (رو به بالا) است. $f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x) = L^+$



$(f'(a)=0)$ در a ماکسیمم نسبی (رو به پایین) است. $f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x) = L^-$



روش چهارم: تقریب‌زنی و البته گاهی ابتدا تجزیه و سپس تقریب بهتر است.

روش پنجم: جدول تعیین علامت برای 0^+ یا 0^-

روش ششم: استفاده از دایره یا نمودار مثلثاتی برای توابع مثلثاتی

۱۵ به‌طور کلی برای محاسبه $\lim\limits_{x\to a}[g(x)]$ که $g(a)=L$ باشد (یا بهتر است بگوییم $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$)، اگر L عددی صحیح باشد، باید L^+ یا L^- را به یکی از روش‌های ۶ گانه نکته قبل، مشخص کنیم و سپس مقدار حدود چپ و راست را مشخص کرده و به خواسته سوال پاسخ دهیم.

نکته ۱ $f(x) = [[x]-x] = [x]+[-x] \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = -1 \Rightarrow \text{همواره حد از } x \notin \mathbb{Z} \text{ به دست می‌آید} \\ f(a) \Rightarrow \text{بستگی به a دارد} \end{cases}$

* وقتی $f(x) = g(x)[x]$ در نقطه صحیح $x = a$ دارای حد $\Leftarrow$ $\begin{cases} \circ \times [a^+] = \circ \\ \text{و} \\ \circ \times [a^-] = \circ \end{cases}$
است که $g(a) = \circ$ و در همسایگی $x = a$ تعریف شده باشد

نکته ۲

* اگر احساس کردید حد جزء صحیح، دارای ابهام $\frac{\circ}{\circ}$ است، در مرحله اول فقط از جزء صحیح آن حد بگیرید. (حذف جزء صحیح با حدگیری از آن در همسایگی مربوطه)، و در بقیه xها عددگذاری نکنید!! (چون اگر احساس و حدس شما در مورد مبهم بودن حد درست باشد لازم است این xها بمانند تا عامل صفرشونده از صورت و مخرج با هم ساده شوند)

تذکر خیلی مهم **باتوجه به حذف مشتق مثلثاتی از برنامه درسی دانش‌آموزان رشته تجربی و محدودیت اجرایی استفاده از هوپیتال در اکثر مسائل حد مثلثاتی، استفاده از هوپیتال برای حد مثلثاتی توصیه نمی‌شود.**

۱۵ هم‌ارزی مثلثاتی (u تابعی از x و $u \to \circ$):

تابع	$\sin u$	$\tan u$	$\cos u$	$\tan u - \sin u$
هم‌ارزی	$\sin u \sim u$ $\sin^n u \sim u^n$ $\sin^n(ax) \sim (ax)^n$	$\tan u \sim u$ $\cot u \sim \frac{1}{u}$ $\tan^n u \sim u^n$ $\tan^n(ax) \sim (ax)^n$	$\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$ $\cos^n u \sim 1 - \frac{nu^2}{2}$ $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$ $1 - \cos^n u \sim \frac{nu^2}{2}$	$\tan u - \sin u \sim \frac{u^3}{2}$ $\tan^n u - \sin^n u = \frac{n}{2} u^{n+2}$

خلاصه نکات فصل نهم: حد و پیوستگی

برای رسم نمودار تابع در مجاورت خط مجانب قائم آن $(x=a)$ کافی است $x \to a^+$ و $x \to a^-$ را محاسبه کنیم، اما برای رسم نمودار تابع در مجاورت مجانب افقی آن $(y=b)$ کافی است $f(10)$ یا $f(-10)$ را با b مقایسه کنیم.

* $\dfrac{\text{۰حدی}}{\text{۰حدی}} \Leftarrow$ مبهم

* $\dfrac{\text{۰واقعی}}{\text{۰حدی}} = ۰$

* $\text{ت ن} = \dfrac{\text{صورت هرچه باشد (عدد یا بی‌نهایت)}}{\text{صفر واقعی}} \Leftarrow$ تابع در آن همسایگی تعریف نشده است و حد ندارد و مجاز به ساده‌سازی نیستیم

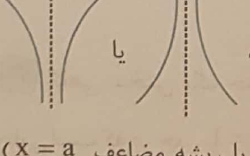
* $\infty = \dfrac{\text{عددغیرصفر}}{\text{۰حدی}} \Leftarrow \begin{cases} \dfrac{\text{عدد}+}{۰^+} = +\infty \\ \dfrac{\text{عدد}-}{۰^+} = -\infty \\ \dfrac{\text{عدد}+}{۰^-} = -\infty \\ \dfrac{\text{عدد}-}{۰^-} = +\infty \end{cases}$

* صفر واقعی علاوه بر توابع جزء صحیح‌دار در برخی توابع قدرمطلقی مانند $x \pm |x|$ نیز می‌تواند به وجود بیاید.

* اگر در حدگیری توابع جزء صحیح‌دار با حد $\dfrac{\text{عدد}}{۰}$ یا $\dfrac{۰}{۰}$ مواجه شدید، حتماً به حدی یا واقعی بودن آن صفرها توجه کنید.

* درحد گیری مثلثاتی $\xLeftarrow{\text{هرگاه}}$ $\begin{cases} \text{حاصل } \sin u \text{ و } \cos u \text{ برابر ۱ شد } \xrightarrow{\text{حتما}} ۱^- \text{ است} \\ \text{حاصل } \sin u \text{ و } \cos u \text{ برابر ۱- شد } \xrightarrow{\text{حتما}} (-۱)^+ \text{ است} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} ۱ \pm \cos u \geq ۰ \\ ۱ \pm \sin u \geq ۰ \\ \cos u - ۱ \leq ۰ \\ \sin u - ۱ \leq ۰ \end{cases}$

اگر حدی به صورت $+\infty = \dfrac{\text{عدد غیرصفر}}{\text{۰حدی}} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$ یا $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{p(x)}{q(x)} = -\infty$ باشد و به ازای $x \to a^+$ و $x \to a^-$ حاصل هر دو حد، ... اما یکسان باشد (هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$)، آن‌گاه نمودار تابع در $x=a$ انفصال مضاعف به یکی از دو صورت



... دارد. حال اگر در این شرایط مخرج چندجمله‌ای درجه دوم باشد، قطعاً به فرم $k(x-a)^2$ است (یعنی مربع کاملی با ریشه مضاعف $x=a$)

در حدهایی با فرم $\dfrac{\text{عدد}}{۰} \pm \dfrac{\text{عدد}}{۰}$ یا $\infty - \infty$، کافی است ابتدا مخرج مشترک بگیریم و سپس حد را حل کنیم. (تازه شاید بعد از مخرج مشترک‌گیری به $\dfrac{۰}{۰}$ برسیم که با ساده کردن، هوپیتال یا هم‌ارزی رفع ابهام شود.)

				... به توان
$+\infty + \infty = +\infty$	$(+\infty)\times(+\infty) = +\infty$	عدد غیرصفر $\times \infty = \infty$	عدد $\pm\infty = \pm\infty$	$(\pm\infty)^n = \underset{\downarrow}{\pm\infty}$ علامت آن بستگی به زوج یا فرد بودن توان n دارد.
$-\infty - \infty = -\infty$	$(-\infty)\times(-\infty) = +\infty$	مبهم $\Leftarrow \infty \times$ ۰حدی	$\pm\infty \pm$ عدد $= +\infty$	
مبهم $\Leftarrow +\infty - \infty$	$(+\infty)\times(-\infty) = -\infty$	۰ $= \infty \times$ ۰واقعی		
	مبهم $\Leftarrow \frac{\infty}{\infty}$			

۲۰ **هم‌ارزی پر توان:** وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ هر چندجمله‌ای بر حسب x هم‌ارز است با جمله با بزرگترین توان همراه ضریب و علامت آن

تذکر خیلی مهم **در هم‌ارزی‌های پرتوان نیز مانند هم‌ارزی‌های مثلثاتی اگر xها به‌صورت تفریق ساده شوند $(ax-ax)$ و صفر مطلق ظاهر شود، آن هم‌ارزی مشکل دارد و باید از روشی دیگر یا هم‌ارزی‌های قوی‌تر استفاده کنیم.**

نکته

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\dots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}\ ;\ m=n & \text{(درجه صورت و مخرج برابر باشند)}\\ 0\ ;\ m>n & \text{(درجه مخرج بزرگتر باشد)}\\ \pm\infty\ ;\ n>m & \text{(درجه صورت بزرگتر باشد)}\end{cases}$$

($\pm\infty$) بستگی به علامت x و a_0 و b_0 دارد.

۲۱ اگر در مسائل، حاصل حد در بی‌نهایت $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots}$ را بدهند و مجهولاتی مانند توان n یا m و ضرایبی مانند a_0 یا b_0 را بخواهند، از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم:

الف) اگر حاصل حد = عددی غیر صفر $\Leftarrow$ بزرگترین توان صورت و مخرج برابرند $(m=n)$ $\Leftarrow$ با هم‌ارزی پرتوان می‌توان حاصل حد را بررسی کرده مجهول دیگر را به دست آوریم.

ب) اگر حاصل حد = صفر $\Leftarrow$ بزرگترین توان مخرج $>$ بزرگترین توان صورت $\Leftarrow$ در این مسائل معمولاً هم a و هم n به دست می‌آید.

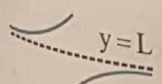
ج) اگر حاصل حد $= \infty \Leftarrow$ درجه صورت $<$ درجه مخرج

۲۲ گاهی سختی یک حد در بی‌نهایت جایی است که در حد $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$، L^+ یا L^- بودن اهمیت پیدا کند.

الف) حدود جزء صحیح‌دار به صورت مقابل است که L عددی صحیح باشد.

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)]=[\underset{\substack{\downarrow\\ \text{صحیح وحدی}}}{L}]=\begin{cases}[L^+]=L\\ [L^-]=L-1\end{cases}$$

ب) مسائلی که رسم نمودار تابع در مجاورت خط $y=L$ (مجانب افقی) مدنظر است.



$$\xrightarrow{\text{با توجه به شکل}}\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \xrightarrow{\text{نمودار زیر خط}} \text{در واقع } L^- \text{ است.}\\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=L \xrightarrow{\text{نمودار بالای خط}} \text{در واقع } L^+ \text{ است.}\end{cases}$$

زلوفن **برای تعیین L^+ یا L^- وقتی $x \to \pm\infty$ کافی است که عددی بزرگ مثلا $x=10$ یا $x=-10$ را به جای $+\infty$ و $-\infty$ در $f(x)$ جایگذاری کنیم و با L مقایسه کنیم:**

$$\left.\begin{aligned} f(10)>L\Rightarrow L^+\\ f(10)<L\Rightarrow L^-\end{aligned}\right\}$$

خلاصه نکات فصل نهم: حد و پیوستگی

۲۳
* اگر نمودار تابع در مجاورت $x=a$ (مجانب قائم) مد نظر باشد، باید حدود $x\to a^+$ و $x\to a^-$ را محاسبه کرد که $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شوند.
* اگر در حد گیری، داخل جزء صحیح نامتناهی (∞) شد $\Leftarrow$ می‌توان جزء صحیح را حذف کرد.
* $\sin\infty$ و $\cos\infty$ اعدادی نامشخص بین $+1$ و -1 هستند، لذا در هم‌ارزی پرتوان مانند عدد عمل می‌کنند و قدرتی ندارند.

۲۴
$$a^{+\infty}=\begin{cases}0 & |a|<1\\ +\infty & a>1\\ \pm\infty & a<-1\end{cases}$$

۲۵ **پیوستگی:** تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ پیوسته گوییم: $\xleftarrow{\text{هرگاه}}$
$\begin{cases}\text{اولا : حد داشته باشد (حد چپ و راست متناهی و برابر باشند)}\\ \text{ثانیاً: مقدار داشته باشد و حد با مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد.}\end{cases}$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

۲۶
* در توابع به صورت $f(x)=\begin{cases}u(x) & x\neq a\\ v(x) & x=a\end{cases}$ $\Leftarrow$ محاسبه حد تابع در a از ضابطه اول $(x\neq a)$ — محاسبه مقدار تابع در a از ضابطه دوم $(x=a)$
* در توابع به صورت $f(x)=\begin{cases}u(x) & x\in\mathbb{Z}\\ v(x) & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ $\Leftarrow$ محاسبه حد تابع همواره از ضابطه دوم $(x\neq\mathbb{Z})$ — محاسبه مقدار تابع بستگی به a دارد که صحیح باشد یا غیر صحیح
* در توابع به صورت $f(x)=\begin{cases}u(x) & x\in\mathbb{Q}\\ v(x) & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ $\Leftarrow$ فقط در نقاطی پیوسته‌اند که $u=v$ باشد
* توابع چندجمله‌ای، گویا نمایی، لگاریتمی، مثلثاتی و قدرمطلقی در همه نقاط دامنه خود پیوسته‌اند، اما در توابع رادیکالی و جزء صحیح‌دار جای بحث وجود دارد.

۲۷ **اعمال جبری روی توابع پیوسته و ناپیوسته:**

* اگر f و g هر دو در $x=a$ پیوسته باشند $\xLeftarrow{\text{آنگاه}}$
  * $f\pm g$ و fg در $x=a$ قطعاً پیوسته‌اند.
  * $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ $\Leftarrow$ نامعلوم (چون ممکن است مخرج صفر و ناپیوسته شوند.)
* اگر f و g هر دو در $x=a$ ناپیوسته باشند $\xLeftarrow{\text{هرگاه}}$
  * پیوستگی توابع حاصل از اعمال جبری روی آن‌ها نامعلوم است
  * البته از $f+g$ و $f-g$ حداکثر یکی از آن‌ها در $x=a$ پیوسته‌اند (چون اگر هر دو پیوسته باشند.) از مجموع و تفاضل آن‌ها نتیجه می‌گیریم که f و g نیز در $x=a$ پیوسته‌اند.
* اگر f پیوسته و g ناپیوسته باشد
  * $f\pm g$ و $\frac{g}{f}$ قطعاً ناپیوسته‌اند.
  * fg و $\frac{f}{g}$ ممکن است پیوسته باشند.

۲۸ **تابع $f(x)$ را در $x=a$ از راست پیوسته می‌گوییم** $\xLeftarrow{\text{هرگاه}}$
اولاً: در $x=a$ حد راست متناهی و مشخصی داشته باشد.
ثانیاً: در $x=a$ مقدار داشته باشد و مقدار تابع برابر حد راست باشد.

* در واقع نقطه تو پر به نمودار سمت راستی چسبیده است.

مثال **تابع $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح فقط از راست پیوسته است.**

۲۹ **تابع $f(x)$ را در $x=a$ از چپ پیوسته می‌گوییم** $\xLeftarrow{\text{هرگاه}}$
اولاً: در $x=a$ حد چپ متناهی و مشخصی داشته باشد.
ثانیاً: در $x=a$ مقدار داشته باشد و مقدار تابع برابر حد چپ باشد.

۳۰ تابع $f(x)=[g(x)]$ را در نظر بگیرید.

* در نقاطی که $g(x)$ عددی صحیح و اکیداً صعودی است ⇐ f فقط از راست پیوسته است.

$$L\in\mathbb{Z}\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}[g(x)]=[L^+]=L\\ \lim\limits_{x\to a^-}[g(x)]=[L^-]=L-1\\ f(a)=L\end{cases}$$

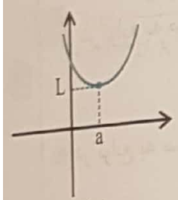
حد راست = مقدار تابع ⇒ فقط از راست پیوسته

* در نقاطی که $g(x)$ عددی صحیح و اکیداً نزولی است ⇐ f فقط از چپ پیوسته است.

$$L\in\mathbb{Z}\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}[g(x)]=[L^-]=L-1\\ \lim\limits_{x\to a^-}[g(x)]=[L^+]=L\\ f(a)=L\end{cases}$$

حد چپ = مقدار تابع ⇒ فقط از چپ پیوسته

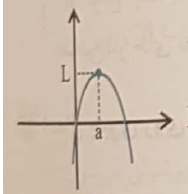
* در نقطه مینیمم نسبی تابع $y=g(x)$ تابع $f(x)=[g(x)]$ حد دارد و پیوسته است.



$y=g(x)$

$$\Rightarrow L\in\mathbb{Z}\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}[g(x)]=[L^+]=L\\ f(a)=[g(a)]=[L]=L\end{cases}$$

* در نقطه ماکزیمم نسبی تابع $y=g(x)$ ، تابع $f(x)=[g(x)]$ حد دارد ، اما ناپیوسته است.



$y=g(x)$

$$L\in\mathbb{Z}\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}[g(x)]=[L^-]=L-1\\ f(a)=L\end{cases}$$

حد $\neq$ مقدار تابع ⇐

۳۱ تابع $f(x)$ را در بازه باز (a,b) پیوسته می‌گوییم، هرگاه در همه نقاط متعلق به این بازه پیوسته باشد.

۳۲ تابع $f(x)$ را در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته می‌گوییم هرگاه ⇐

* در همه نقاط درون بازه (a,b) پیوسته باشد.
* در $x=a$ (سمت چپ بازه بسته) از راست پیوسته باشد: $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$
* در $x=b$ (سمت راست بازه بسته) از چپ پیوسته باشد. $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$

نکته

توابع چندجمله‌ای، کسری، رادیکالی، مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی و قدرمطلقی در بازه دامنه و هر زیر بازه‌ای از آن پیوسته‌اند و بزرگ‌ترین بازه پیوستگی آن‌ها همان دامنه آن‌هاست. (توابع چندضابطه‌ای و جزء صحیح‌دار در این دسته نیستند.)

تابع $f(x)=\sqrt{u}$ در روی بازه دامنه خود پیوسته است اما نمی‌توان گفت در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است، چون در نقاطی که $u=0$ است (در واقع همان نقاط مرزی دامنه)، ممکن است فاقد حد بوده و ناپیوسته باشد.

هر تابع در نقاطی غیر از دامنه خود قطعا ناپیوسته است، چون فاقد مقدار است، اما گاهی تابع در نقاطی از دامنه خود ناپیوسته است.

مثال

$y=\sqrt{u} \Leftarrow$
- در نقاطی که $u>0 \Leftarrow$ قطعا پیوسته
- در نقاطی که $u<0 \Leftarrow$ قطعاً ناپیوسته
- در نقاطی که $u=0 \Leftarrow$ نامعلوم و باید حدود چپ و راست بررسی شوند.

$y=[u] \Leftarrow$ در نقاطی که u عددی صحیح می‌شود، هرچند عضو دامنه باشند، ممکن است ناپیوسته شود و حدود چپ و راست باید بررسی شوند.

توابع چند ضابطه‌ای در مرز محدودهٔ ضوابط با وجود عضو دامنه بودن، ممکن است ناپیوسته باشند و باید بررسی شوند. (اهمیت نقاط مرزی)

۲۳ تابع fog را در $x=a$ پیوسته گوییم $\Leftarrow$ هرگاه
- **اولاً:** تابع $g(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد. (حد = مقدار)
- **ثانیاً:** تابع $f(x)$ در $x=g(a)$ پیوسته باشد (مقدار = حد)