۱. اصل ضرب و اصل جمع :

اصل ضرب (اصل شمارش) : اگر دو عمل مستقل از هم یکی به **m** روش متمایز امکان پذیر باشد و به ازای هریک از آن **m** روش عمل دیگر به **n** روش متمایز امکان پذیر باشد ، هر دو عمل با هم (عمل اول و دوم) به $m\times n$ روش مختلف امکان پذیر است.

اصل جمع : اگر یک عمل به دو روش امکان پذیر باشد (روش اول یا دوم) ، طوری که برای روش اول **m** انتخاب و برای روش دوم **n** انتخاب وجود داشته باشد، آن گاه عمل به **m+n** روش امکان پذیر است.

※ در چند عمل مستقل و مختلف : و $\xrightarrow{\text{تبدیل به}}$ ضرب

※ در یک عمل با چند روش مختلف و جدا از هم : یا $\xrightarrow{\text{تبدیل به}}$ جمع

نکته : ※ اصل ضرب و جمع به ترتیب برای بیش از دو عمل و روش نیز قابل تعمیم هستند $\Leftarrow$ $\begin{cases} \text{اصل ضرب} : m\times n\times k\times \ldots \\ \text{اصل جمع} : m+n+k+\ldots \end{cases}$

※ تعداد حالت های تاریخ تولد یک فرد : $\begin{cases} \text{فصل تولد} \Rightarrow ۴ \\ \text{ماه تولد} \Rightarrow ۱۲ \\ \text{روز هفته} \Rightarrow ۷ \\ \text{روز تولد} \Rightarrow ۳۶۵ \end{cases}$

۲.جایگشت :

※ به هریک از حالت های قرار گرفتن چند شی ، متمایز ، کنار هم ، یک **جایگشت** آن اشیاء می گوییم.

※ تعداد جایگشت های **n** شی ء متمایز در **n** جایگاه ، در یک ردیف برابر **n!** است. $\xrightarrow[\text{مهم}]{\text{شروط}}$
۱- اشیاء متمایز باشند.
۲- تعداد اشیاء = تعداد جایگاه ها
۳- اشیاء در یک ردیف باشند.

در نکتهٔ بالا اگر هرکدام از شروط برقرار نباشد، پاسخ متفاوت است.

※ **جایگشت اشیاء دارای عضو یکسان** : تعداد جایگشت های **n** شی ء در **n** جایگاه در یک ردیف طوری ، که $k_۱$ تای آن ها از نوع اول و $k_۲$ تای آن ها از نوع دوم و ... باشند ، برابر است با : $\dfrac{n!}{k_۱!\times k_۲!\times\ldots}$

※ می توانیم فرمول بالا را «اصل تقسیم» نیز بنامیم.

※ اگر در مسائل جایگشت ، k شی ء متمایز و **n** جایگاه داشته باشیم **(n>k)** ، آن گاه تعداد کل جایگشت ها از اصل ضرب یا رابطهٔ زیر به دست می آید : $P(n,k)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$

※ در این مسائل استفاده از اصل ضرب بهتر و سریع تر است.

※ به عبارت دیگر می توان گفت که $P(n,k)$ انتخاب **k** شی ء از **n** شی ء متمایز است ، طوری که ترتیب قرار گرفتن (جایگشت) در آن ها مهم و مؤثر است.

※ تعداد حالت هایی که **n** نفر (قاعدتاً متمایزند !!) می توانند در یک میزگرد قرار بگیرند : $(n-۱)!$

۳.جایگشت (مکان های شرط دار) :
مرحلهٔ «۱» : مشخص کردن تعداد حالت های مکان های شرط دار
مرحلهٔ «۲» : مشخص کردن تعداد جایگشت های بقیهٔ مکان ها
مرحلهٔ «۳» : استفاده از اصل ضرب و ضرب کردن تعداد حالت های مرحلهٔ «۱» در مرحلهٔ «۲»

نکته : در مسائل عددسازی ، دقت کنید که رقم سمت چپ شرط دار است و نمی تواند صفر باشد.

۴.جایگشت های یک در میان :

تیپ اول : تعداد جایگشت های یکی در میان n شی ء با m شی ء متمایز (اختلاف m و n یک واحد) $\Leftarrow$ $n!\times m!$

* اگر k شی یکسان بین آن ها داشتیم از اصل تقسیم استفاده می کنیم : $(\frac{n!\times m!}{k!})$

* یک در میان بودن نوعی که تعدادش بیشتر است، در واقع همان یک در میان بودن همه است.

تیپ دوم : تعداد جایگشت های یکی در میان n شی ء متمایز با n شی ء متمایز دیگر (تعداد یکسان) $\Leftarrow$ $۲\times n!\times n!$

* اگر k شی یکسان بین آن ها داشتیم از اصل تقسیم استفاده می کنیم : $(\frac{۲\times n!\times n!}{k!})$

* یک در میان بودن یک نوع ، در واقع همان یک در میان بودن همه است.

تیپ سوم : اگر صحبت از یک در میانی یک نوع از اشیاء باشد و تعداد اشیاء این نوع از نوع دیگر بیشتر یا مساوی باشد، در واقع ، همان تیپ های اول و دوم (یک در میانی کل اشیاء) می شود ، اما اگر تعداد اشیاء آن نوع مورد بررسی کمتر از نوع دیگر باشد ، باید حالت های مختلف را بررسی کرده و در پایان آن ها را با هم جمع کنیم. مثلاً اگر یک واحد کمتر باشد، $۳\times n!\times m!$ حالت مختلف داریم.

تذکر : در مسائل شامل دو نوع شی ء ، قرارنگرفتن هیچ دو نوعی کنارهم ، همان یک درمیان است.

۵. کنار هم قرارگرفتن نوعی از اشیاء کنار هم : برای حل این مسائل از تکنیک بسته بندی فرضی استفاده می کنیم. به این صورت که نوع مورد نظر را در یک بسته قرار داده و همهٔ آن ها را یک شی ء محسوب می کنیم. سپس تعداد جایگشت های n شی ء بدون بسته و آن یک بسته (یعنی $(n+۱)!$) را در تعداد جایگشت های اشیاء درون بسته ضرب می کنیم. چنانچه اشیاء یکسان وجود داشت، در پایان از اصل تقسیم نیز استفاده می کنیم.

۶. در مسائلی از جایگشت که گفته می شود : «نوعی از اشیاء کنار هم قرار نگیرند» باید به شیوهٔ زیر عمل کنیم :

مرحلهٔ«**۱**» : چیدن اشیایی که مجازند کنار هم قرار بگیرند و مشخص کردن جاهای خالی بین آن ها $(n+۱)$

مرحلهٔ«**۲**» : مشخص کردن تعداد جایگشت های n شی ء اول (که مجازند کنارهم قرار بگیرند) درn جایگاه **n!**

مرحلهٔ«**۳**» : مشخص کردن تعداد جایگشت های m شی ء دیگر (که مجازند نیستند کنارهم قرار بگیرند) در $(n+۱)$ جایگاه خالی

مرحلهٔ«**۴**» : ضرب کردن تعداد جایگشت های مرحلهٔ«**۲**» در تعداد جایگشت های مرحلهٔ«**۳**»

۷. ترکیب :

مسائلی از آنالیز که در آن ترتیب قرارگرفتن اشیاء مهم نیست (جابه جایی بی تأثیر است).

تعداد انتخاب های r شی ء از n شی ء متمایز که ترتیب مهم نباشد : $C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-۱)!r!}$ $\quad ۰\leq r\leq n$

$$P(n,r)=\binom{n}{r}\times r!$$

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$$

$$\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n$$

$$\binom{n}{۲}=\binom{n}{n-۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

$$\binom{n}{۳}=\binom{n}{n-۳}=\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}$$

نکته

$$\binom{n}{a}=\binom{n}{b}\xrightarrow[۰\le a,b\le n]{\text{آن گاه}}\begin{cases}a=b & \text{یا}\\ a+b=n\end{cases}$$

$$\text{قاعدهٔ پاسکال}\Rightarrow\binom{n}{r}+\binom{n}{r+۱}=\binom{n+۱}{r+۱}$$

$$\max\binom{n}{k}\Rightarrow\begin{cases}\text{زوج}\quad n\Rightarrow k=\frac{n}{۲}\\ \text{فرد}\quad n\Rightarrow k=\frac{n\pm۱}{۲}\end{cases}$$

۸. گاهی در مسئله ای ترتیب مهم است ، اما باید ابتدا بدون در نظرگرفتن ترتیب و به صورت ترکیب **r** شی ء را از بین **n** شی ء متمایز انتخاب کرده و سپس جایگشت های لازم به صورت **k!** را با اصل ضرب لحاظ کرد.

۹. مسئله لنگه کفش ها : تعداد حالت های انتخاب **k** لنگه کفش از بین **n** جفت کفش ، به طوری که هیچ کدام جفت نباشند ، برابر است با : $\binom{n}{k}\times ۲^k$

نکته : نکتهٔ بالا صرفاً برای مسائل لنگه کفش قابل استفاده نیست و اگر در سوالی صحبت از هم مدرسه ای نبودن ، هم کلاسی نبودن ، از یک خانواده نبودن و ... شد ، ممکن است از نکتهٔ فوق استفاده شود و نیز اگر جایگشت اشیاء هم مهم باشد ، در پایان k! را هم در پاسخ ضرب می کنیم.

۱۰. تعداد زیرمجموعه ها :

❋ تعداد کل زیرمجموعه های یک مجموعهٔ **n** عضوی : ۲^n

❋ تعداد کل زیرمجموعه های یک مجموعهٔ **n** عضوی که وضعیت **k** عضو آن مشخص شده است (یعنی مشخص شده که حتماً متعلق به زیرمجموعه باشند یا عضو زیرمجموعه نباشند) : ۲^{n-k}

❋ تعداد زیرمجموعه های **k** عضوی یک مجموعهٔ **n** عضوی : $\binom{n}{k}$

❋ حالت های شرط دار برای نکتهٔ بالا :

۱- زیرمجموعهٔ **k** عضوی شامل عضو مشخصی باشد : $\binom{n-۱}{k-۱}$

۲- زیرمجموعهٔ **k** عضوی فاقد عضو مشخصی باشد : $\binom{n-۱}{k}$

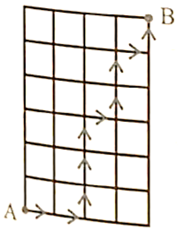
❊ مجموع کل تعداد زیرمجموعه های صفر عضوی ، یک عضوی ... و **n** عضوی یک مجموعهٔ **n** عضوی ، برابر تعداد کل زیرمجموعه های آن (۲^n) است. یعنی : $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{n}=۲^n$

۱۱. تعداد تابع های متمایز که می توان از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ m عضوی نوشت :

$$m^m = (\text{تعداد اعضای دومی})^{\text{تعداد اعضای اولی}}$$

تذکر : استفاده و حفظ کردن نکتهٔ فوق الزامی نیست و توصیه نمی شود ، می توان از اصل ضرب نیز استفاده کرد (مخصوصاً اگر مسئله دارای شرط باشد).

۱۲. تعداد جواب های طبیعی معادلهٔ $x_۱+x_۲+...+x_k=n$ برابر است با : $\binom{n-۱}{k-۱}$



۱۳. تعداد روش های مختلفی که می توان با حرکت در مسیرهای صفحهٔ شطرنجی $m\times n$ از A به B رفت ، به طوری که کوتاهترین مسیر انتخاب شود (فقط حرکت به راست و بالا) : $\binom{m+n}{m}=\binom{m+n}{n}=\frac{(m+n)!}{m!n!}$

۱۴. تعداد مربع های موجود در یک صفحهٔ شطرنجی مربعی $n\times n$:

$$۱^۲+۲^۲+...+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

۱۵. تعداد کل مستطیل های موجود در یک صفحهٔ شطرنجی $m\times n$:

$$\underbrace{\binom{m+۱}{۲}\binom{n+۱}{۲}}_{\text{انتخاب دو خط افقی و دو خط عمودی}} \quad \text{یا} \quad (۱+۲+...+m)(۱+۲+...+n)=\frac{m(m+۱)}{۲}\times\frac{n(n+۱)}{۲}$$

۱.پدیدهٔ تصادفی : پدیده یا آزمایشی که نتوان نتیجهٔ آن را قبل از انجام ، به طور قطعی پیش بینی کرد.

۲.فضای نمونه ای : مجموعهٔ تمام نتایج ممکن در یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونه ای آن پدیده می نامیم و معمولاً آن را با **S** و تعداد فضای نمونه ای را با **n(S)** نشان می دهیم.

نکته : در پرتاب **m** تاس و **n** سکه باهم ، فضای نمونه ای $n(S)=۶^m\times ۲^n$ عضو دارد.

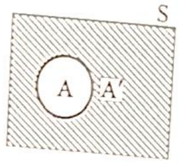
۳.پیشامد تصادفی : هر زیرمجموعه ای از فضای نمونه ای **S** را یک پیشامد تصادفی درآن فضای نمونه ای می نامیم.

نکته :
- ❊ تعداد کل پیشامدها از فضای نمونه ای S برابر $۲^{n(S)}$ است. (در واقع تعداد کل زیرمجموعه های فضای نمونه ای را می خواهیم.)
- ❊ تعداد پیشامدهای k عضوی از فضای نمونه ای S : $\binom{n(S)}{k}$

۴.اعمال روی پیشامدها :

متمم یک پیشامد : پیشامد A' (یا A^c) زمانی رخ می دهد، که پیشامد A رخ ندهد.

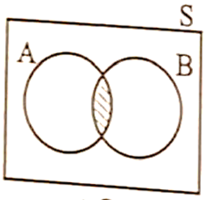
$$n(A)+n(A')=n(S)\Rightarrow n(A)=n(S)-n(A')$$



نکته ۱ دو شرط متمم بودن $\Rightarrow\begin{cases}A\cup A'=S\\ A\cap A'=\varnothing\end{cases}$

اشتراک دو پیشامد $(A\cap B)$ **:** **A** و **B** هر دو رخ بدهند (**A** رخ دهد و **B** رخ دهد.)

نکته ۲ : نحوۀ محاسبۀ اشتراک دو پیشامد :



A∩B

* دو پیشامد ناسازگار (با هم رخ نمی دهند) : $\left.\begin{matrix}n(A\cap B)=0\\ A\cap B=\varnothing\end{matrix}\right\}$

* دو پیشامد مستقل : $n(A\cap B)=n(A)\times n(B)$

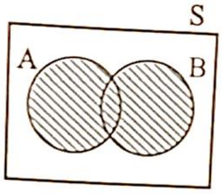
* اگردو پیشامد، ناسازگار یا مستقل نباشند $n(A'\cap B)=n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$ نوشتن پیشامد ساده تر و مشخص کردن اعضایی که شامل پیشامد دیگر نیز می شوند.

اجتماع دو پیشامد $(A\cup B)$ **:** حداقل یکی از پیشامدهای **A** یا **B** رخ دهد، یعنی**A** یا **B** رخ دهد.(یا هردو)

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$\underbrace{n(\overset{\text{نه } A}{A'}\cap \overset{\text{نه } B}{B'})}_{\text{هیچ کدام از آن ها رخ ندهند.}}=n(A\cup B)'=n(S)-\underbrace{n(A\cup B)}$$

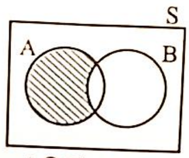
متمم آن یعنی حداقل یکی از آن ها رخ دهد.



A∪B

تفاضل دو پیشامد $(A-B)$ **:** پیشامد **A** رخ دهد و **B** رخ ندهد.

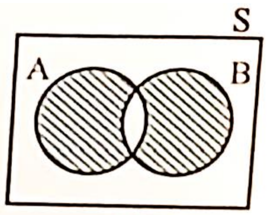
$$n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$
$$n(A'\cap B)=n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$$



A∩B′ = A − B

تفاضل متقارن $(A\Delta B)$ **:** فقط پیشامد **A** یا فقط پیشامد **B** رخ دهد.(فقط یکی از آن ها رخ دهد.)

$$n(A-B)+n(B-A)=n(A\cup B)-n(A\cap B)=n(A)+n(B)-2n(A\cap B)$$



AΔB

۵. احتمال وقع پیشامد A : نسبت تعداد اعضای پیشامد A (تعداد حالت های مطلوب و موردنظر) به تعداد اعضای فضای نمونه ای S (تعداد کل حالت های ممکن) $\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت های ممکن}} = P(A)$

۶.

※ پیشامد غیرممکن (نشدنی) : پیشامد تهی و با تعداد اعضای صفر $A=\varnothing \Rightarrow n(A)=0 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{0}{n(S)}=0$

※ پیشامد حتمی (قطعی) : پیشامدی که برابر کل S باشد. $A=S \Rightarrow n(A)=n(S) \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{n(S)}{n(S)}=1$

نکته : مقدار احتمال یک پیشامد ، عددی در بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ است. پیشامد حتمی $\leftarrow 0 \le P(A) \le 1 \rightarrow$ پیشامد غیرممکن

۷. قوانین احتمال :

۱) قانون متمم یک پیشامد :

$$n(A)+n(A')=n(S) \xrightarrow{\div n(S)} P(A)+P(A')=1 \Rightarrow P(A)=1-P(A')$$

۲) قانون اشتراک : A و B هر دو با هم رخ دهند.

- ✓ دو پیشامد ناسازگار : با هم رخ نمی دهند. $\Leftarrow P(A\cap B)=0$
- ✓ متضاد ناسازگار : $P(A\cap B)\neq 0$
- ✓ دو پیشامد مستقل : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
- ✓ دو پیشامد وابسته : مستقل نیستند. $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$

نکته ۱ :

※ جدا از هم بودن دو پیشامد به معنای ناسازگار بودن آن ها است. نه مستقل بودن آن ها (چون در دو مجموعهٔ جدا از هم $A\cap B=\varnothing$ است).

※ گاهی مستقل یا وابسته بودن از روی ظاهر پیشامدها به سادگی قابل تشخیص است و اما گاهی هم قابل تشخیص نیست.

مثال :
- قبولی دو نفر در کنکور $\Leftarrow$ مستقل
- مسائل گروه خونی و رنگ چشم $\Leftarrow$ مستقل

۳) قانون اجتماع : A یا B (یا هر دو) رخ دهد. (حداقل یکی از آن ها رخ دهد).

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

نکته ۲ .

پیشامدهای ناسازگار $\Rightarrow \begin{cases} P(A\cup B)=P(A)+P(B) \\ P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C) \end{cases}$

پیشامدهای مستقل $\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A)\times P(B)}_{P(A\cap B)}$

نکته ۳ .

* اگر پیشامدها مستقل بودند $\Leftarrow$ به دنبال تبدیل اجتماع به اشتراک (با استفاده از متمم اجتماع) هستیم تا از ضرب استفاده کنیم.

* اگر پیشامدها مستقل نبودند $\Leftarrow$ مستقیماً از همان رابطهٔ اجتماع ، اجتماع را به دست می آوریم. (حتی اگر اشتراک بود به اجتماع تبدیل می کنیم).

* اگر $A\subseteq B$
$P(A\cap B)=P(A)'$ $\Leftarrow$ اشتراک حداکثر مقدار خود است.
$P(A\cup B)=P(B)$ $\Leftarrow$ اجتماع حداقل مقدار خود است.

* دو پیشامد ناسازگار $(A\cap B=\varnothing)$:
$P(A\cap B)=۰$ $\Leftarrow$ اشتراک حداقل مقدار خود است.
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ $\Leftarrow$ اجتماع حداکثر مقدار خود است.

۴) **قانون تفاضل** : A رخ دهد و B رخ ندهد.

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$
$$P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$

نکته ۴ .

* $A\subseteq B \longrightarrow \begin{cases} A-B=\varnothing\Rightarrow P(A\cap B')=P(A-B)=۰ \\ A\cap B=A\Rightarrow P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A)\end{cases}$

* دو پیشامد ناسازگارند $B,A\Rightarrow \begin{cases} P(A\cap B)=۰ \\ P(A-B)=P(A)\end{cases}$

* دو پیشامد مستقل اند $B,A\Rightarrow \begin{cases} P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)\times P(B') \\ P(B-A)=P(A'\cap B)=P(A')\times P(B)\end{cases}$

۵) **تفاضل متقارن دو پیشامد** : فقط یکی از آن ها رخ بدهد.(A رخ دهد و B رخ ندهد یا A رخ ندهد و B رخ ندهد).

$$P(A\Delta B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

نکته ۵ .

اگر B,A مستقل باشند. $\Rightarrow P(A\Delta B)=P(A-B)+P(B-A)=P(A\cap B')+P(A'\cap B)=P(A)P(B')+P(A')P(B)$

۸.مسائلی از احتمال که با جایگشت حل می شوند : در این مسائل باید $n(S)$ و $n(A)$ را به کمک جایگشت و اصل ضرب محاسبه کنیم و با فرمول $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ ، احتمال را حساب کنیم.

نکته : * مسائلی که از این روش استفاده می کنند $\Leftarrow$
- فصل ، ماه ، هفته و روز تولد
- جابه جایی اشیاء یا افراد
- عدد سازی
- کلمه سازی

* در این مسائل استفاده از تکنیک های یک در میان ، بسته بندی فرضی ، مکان های شرط دار و ... بسیار پرکاربرد است.

۹. مسائلی از احتمال که با ترکیب حل می شوند : در مسائل احتمال مربوط به مهره ها ، کارت ها ، انجمن ها و شوراها ، لنگه کفش ها باید $n(S)$ و $n(A)$ را به کمک ترکیب $\binom{n}{r}$ به دست آورد و مقدار احتمال را محاسبه کرد.

نکته :

* حل مسائل ترکیب که در آن ها مهره ها به صورت متوالی (نه همزمان) با جایگذاری یا بدون جایگذاری از ظرف خارج می شوند : در هر مرحله فقط احتمال مربوط به آن رنگ مهره را مورد بررسی قرار می دهیم و برای مهرهٔ دیگر به این توجه می کنیم که مهرهٔ قبل به ظرف برگردانده شده یا خیر !

* در حالت خارج کردن مهره ها به طور متوالی و بدون جایگذاری ، اگر صحبت از ترتیب خارج کردن رنگ ها نشده باشد ، می توان سوال را به سادگی با فرض همزمان خارج کردن مهره ها حل کنیم.

* اگر در مسائل خارج کردن مهره ها به طور متوالی با جایگذاری یا بدون جایگذاری ، صحبت از این باشد ، که مهره ها را بدون رؤیت خارج کرده ایم ، در حل آن ها فرض می کنیم که اصلاً مهره ها خارج نشده باشند.

* مسائل احتمال در کارت ها نیز معمولاً با ترکیب حل می شوند. البته گاهی $n(A)$ را به کمک نوشتن اعضای پیشامد **A** به دست می آوریم ، اما $n(S)=\binom{n}{k}$ است.

۱۰. احتمال در سکه و فرزند : فضای نمونه ای هر دو دارای دو عضو است.

فضای نمونه ای $=$
- یک فرزند $S=\{d\,,p\}\Rightarrow n(S)=۲$
- دو فرزند $S=\{dd\,,pp\,,dp\,,pd\}\Rightarrow n(S)=۲^۲=۴$
- سه فرزند $S=\{ddd\,,ddp\,,dpd\,,pdd\,,ppd\,,pdp\,,dpp\,,ppp\}\Rightarrow n(S)=۲^۳=۸$

انواع مسائل در سکه و فرزند :

نوع اول (نوشتنی ها) $\Leftarrow$
- ✓ $n(S)$ از رابطهٔ ۲^n به دست می آید (**n** سکه یا **n** فرزند).
- ✓ برای مشخص کردن تعداد اعضای پیشامد موردنظر ، حالت های موردنظر را می نویسیم.

نوع دوم (فرمولی ها) $\Leftarrow$
- ✓ $n(S)$ از رابطهٔ ۲^n به دست می آید.
- ✓ $n(A)$ برای حالت K پسر(دختر) و یا K مرتبه رو (پشت) برابر $\binom{n}{k}$ می باشد، یعنی : $P(A)=\dfrac{\binom{n}{k}}{۲^n}$

نوع سوم (مستقل ها) $\Leftarrow$
- ✓ گاهی ساده تر است مستقل بودن پیشامدها را مدنظر قرار دهیم. $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

۱۱. احتمال در تاس ها :

فضای نمونه : **n** تعداد تاس ها (با یک تاس **n** مرتبه)

انواع مسائل در پرتاب تاس ها ⇐

- نوع اول (نوشتنی ها) ⇐
  - ✓ $n(S)=۶^n$
  - ✓ نوشتن اعضای پیشامد موردنظر
- نوع دوم (جداول سرعتی) ⇐
  - ✓ $n(S)=۶^n$
  - ✓ به دست آوردن تعداد اعضای پیشامد از جداول سرعتی
- نوع سوم (مستقل ها) ⇐
  - ✓ در این مسائل به این نکته توجه می کنیم که تاس ها مستقل از هم هستند و می توانیم اشتراک یعنی «و» را به ضرب تبدیل کنیم.

نکته ۱ :

- ❊ در مسائل تاس ها ، اگر صحبت از «همه» یا «هیچ کدام» شد ⇐
  - مرحلهٔ **۱** : نوشتن معنی فارسی آن به صورت «و» بین عبارت ها
  - مرحله **۲** : استفاده از مستقل بودن پیشامدها و اصل ضرب
- ❊ در مسائل تاس ها ، اگر عبارت «حداقل یکی از آن ها» را دیدیم. ⇐
  - مرحلهٔ **۱** : محاسبه متمم آن یعنی «هیچکدام» با اصل ضرب
  - مرحله **۲** : کم کردن حاصل از یک برای به دست آوردن احتمال مطلوب
- ❊ تبدیل «و» به ضرب ، فقط در پیشامدهای مستقل اتفاق می افتد و اگر پیشامدها مستقل نباشند (مثل مسائلی که گفته می شود ، مجموع دو تاس **۸** شود و ...) اجازهٔ تبدیل «و» به ضرب را نداریم.

جدول سرعتی :

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

۱-مجموع = تعداد حالت ها ⟵ ⟶ مجموع -**۱۳** = تعداد حالت ها

نکته ۲ :

- ❊ اگر m+n=**۱۴** باشد ، آن گاه تعداد حالت هایی که مجموع دو تاس **m** بیاید ، با تعداد حالت هایی که مجموع دو تاس **n** بیاید ، برابرند.
- ❊ یک فرمول نه چندان زیبا و غیرضروری!! $P(A)=\dfrac{۶-|۷-m|}{۳۶} \Leftarrow$ تعداد حالت هایی که مجموع دو تاس **m** بیاید $=۶-|۷-m|$.
- ❊ جدول فوق را با تقارن آن یادبگیرید، تا راحت حفظ شود. $(۲\le m\le ۱۲)$

مجموع دو تاس تفاضل دو تاس	مضرب **۲** (عددی زوج)	مضرب **۳**	❊ مضرب **۴**	مضرب **۶**
احتمال وقوع آن	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۶}$

❊ استثناء : احتمال اینکه تفاضل دو تاس مضرب **۴** شود ، $\frac{۱۰}{۳۶}$ است و از جدول فوق پیروی نمی کند، پس فقط احتمال اینکه مجموع دو تاس ، برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

اعداد متوالی

اعداد رو شده یکسان باشند.

تفاضل دو تاس	۰	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد حالت ها	۶	۱۰	۸	۶	۴	۲

مجموع سه تاس	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
تعداد حالت ها	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۵	۲۷	۲۷	۲۵	۲۱	۱۵	۱۰	۶	۳	۱

+۲ +۳ +۴ +۵ +۶

یک دنبالهٔ مثلثی

از دنبالهٔ مثلثی پیروی نکرده !

یک دنبالهٔ مثلثی

نکته ۳ :

❊ اگر **۲۱**=m+n باشد ، آن گاه تعداد حالت هایی که مجموع سه تاس **m** بیاید ، برابر تعداد حالت هایی که مجموع سه تاس **n** بیاید.

❊ احتمال اینکه مجموع سه تاس ⟸ زوج باشد $= \frac{۱}{۲}$ ، مضرب **۳** باشد $= \frac{۱}{۳}$

❊ مجموع سه تاس زوج بیاید را با هر سه تاس زوج بیاید، اشتباه نگیرید.

۱۲. اگر پیشامد **A** روی یک یا چند تاس و پیشامد **B** روی یک یا چند سکه رخ داده باشد ، **A** و **B** مستقل از یکدیگرند و $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ است.

۱۴. احتمال شرطی :

❊ یکی از روش های حل اکثر مسائل احتمال شرطی ، نوشتن فضای نمونه ای جدید بر اساس شرط داده شده است ، که پیشامد موردنظر را به عنوان زیرمجموعه ای از آن فضای نمونه ای جدید انتخاب می کنیم :

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

شرط

❊ وجود کلمات «می دانیم» یا «اگر» نشان دهندهٔ شرطی بودن احتمال است و جملهٔ بعد از این دو کلمه ، شرط را نشان می دهد.

❊ احتمال وقوع پیشامدA به شرط اینکه پیشامدB رخ دهد.

شرط

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

در مخرج قرار می گیرد.

❊ ابتدا تا حد امکان سعی می کنیم از فرمول های بالا استفاده نکنیم و با نوشتن فضای نمونه ای ، سوال را حل کنیم.

نکته :

$$\begin{cases} * \text{ناسازگارند } B, A \Rightarrow P(A\cap B) = 0 \Rightarrow P(A|B) = P(B|A) = 0 \\ * \text{مستقل اند } B, A \Rightarrow P(A\cap B) = 0 \Rightarrow P(A)\times P(B) \Rightarrow \begin{cases} P(A|B) = P(A) \\ P(B|A) = P(B) \end{cases} \\ * \ P(A\cap B) = P(A) \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} P(A|B) = \dfrac{P(A)}{P(B)} \\ P(B|A) = 1 \end{cases} \end{cases}$$

۱۴. قانون ضرب احتمال :

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A|B)\times P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(B|A)\times P(A)$$

۱۵. احتمال کل : اگر پیشامد E به زیرمجموعه های E_1, E_2, E_3 و ... افراز شده باشد ، آن گاه :

$$P(E) = P(E_1\cap E) + P(E_2\cap E) + P(E_3\cap E) + \dots$$

فرمول احتمال کل : $P(E) = P(E_1)\times P(E|E_1) + P(E_2)\times P(E|E_2) + \dots$

یادداشت : معمولاً مسائل احتمال کل با رسم نمودار درختی به سادگی حل می شوند و نیازی به حفظ کردن فرمول بالا نیست.

۱۶. قاعدهٔ بیز : نوعی احتمال شرطی است که صورت آن از قانون ضرب احتمال و مخرج آن از قانون احتمال کل به دست می آید.

تذکر : البته این سوالات را نیز بهتر است با نمودار درختی حل کنیم.

۱.آمار: مجموعه ای از اعداد ، ارقام و اطلاعات است.

۲. علم آمار: مجموعه روش هایی که در نهایت منجر به قضاوت و پیش بینی مناسب در مورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی می شود.

۳.مراحل علم آمار :
- * جمع آوری اعداد و ارقام
- * طبقه بندی ، سازماندهی و نمایش
- * تحلیل و تفسیر داده ها
- * نتیجه گیری

۴. جامعه و عضو : مجموعهٔ تمام افراد یا اشیاء که دربارهٔ یک یا چند ویژگی آن ها تحقیق صورت بگیرد جامعه یا جمعیت و به هریک از افراد یا اشیاء عضو جامعه می گویند.

۵. **اندازه یا حجم جامعه :** تعداد اعضای جامعه را می گویند.

۶. **نمونه :** بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب شود.

۷. **اندازه یا حجم نمونه :** تعداد اعضای نمونه را می گویند.

۸. **سرشماری :** اگر مطالعهٔ موردنظر بر روی همهٔ افراد جامعه صورت گیرد ، سرشماری انجام داده ایم.

۹. **متغیر :** یک ویژگی از اعضای جامعه است ، که بررسی و مطالعه می شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می کند.

۱۰. **مقدار متغیر :** عددی را که به ویژگی یک عضو نسبت می دهند.

۱۱. **انواع متغیر :**

- **کمی :** متغیرهایی که قابل اندازه گیری اند. ⇐
  - **پیوسته :** اگر یک متغیر دو مقدار a و b را اختیار کند و هر مقدار بین آن ها را نیز بتواند اختیار کند ، مثل : وزن ، قد و ...
  - **گسسته :** متغیری کمی که پیوسته نباشد و کاملاً قابل شمارش باشد مثل : تعداد موش ها و ...
- **کیفی :** متغیرهایی که قابل اندازه گیری نباشند. ⇐
  - **اسمی :** ترتیب در آن اهمیت ندارد. مثل رنگ چشم و ...
  - **ترتیبی :** ترتیب در آن ها اهمیت دارد. مثل مراحل تحصیل و ...

نکته : پیش از متغیرهای کمی گسسته واژهٔ «تعداد» به کار می رود و پیش از متغیرهای کمی پیوسته می توان واژهٔ «میزان» را به کار برد.

۱۲. **آمار توصیفی :** به خلاصه سازی داده ها در قالب نمودارها ، جدول یا شاخص هایی که در قالب معیارهای اندازه گیری می پردازد و اطلاعاتی از چگونگی داده های جمع آوری شده فراهم می کند ، که بسیار مفید است.

۱۳. **معیارهای اندازه گیری :**

- معیارهای گرایشی به مرکز :
  - میانگین
  - میانه
- معیارهای پراکندگی :
  - واریانس
  - انحراف از معیار
  - دامنهٔ تغییرات
  - ضریب تغییرات
  - چارک ها

۱۴. **میانگین (متوسط یا مرکز ثقل) :**

* یکی از ساده ترین و پرکاربردترین معیارهای اندازه گیری

* آن را به صورت $\overline{X}$ نمایش می دهند.

* فرمول محاسبهٔ میانگین : (x_i مقدار هر داده و **N** تعداد کل داده ها)

$$\overline{X} = \frac{\text{مجموع داده ها}}{\text{تعداد کل داده ها}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

* اگر تمام داده ها را در عدد **a** ضرب کنیم و با عدد **b** جمع کنیم ، میانگین داده های جدید از ضرب میانگین قدیمی در عدد **a** و جمع با عدد **b** حاصل می شود :

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \Rightarrow \text{میانگین} = \overline{X}$$
$$ax_1 + b, ax_2 + b, \ldots, ax_n + b \Rightarrow \text{میانگین} = a\overline{X} + b$$

* میانگین تخمینی : در صورتی که ارقام داده شده در سوال بزرگ باشند از روش میانگین تخمینی استفاده می کنیم. به این صورت که یک عدد را به عنوان میانگین تخمین می زنیم و سپس تمام داده ها را از این عدد کم می کنیم و حاصل آن ها را با هم جمع و بر تعداد تقسیم می کنیم. در نهایت حاصل را با میانگین تخمینی جمع می کنیم و میانگین دقیق به دست می آید :

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \Rightarrow \qquad = \overline{X'} \Rightarrow \overline{X} - \overline{X'} = \frac{(x_1 - \overline{X'}) + (x_2 - \overline{X'}) + \ldots + (x_n - \overline{X'})}{N} = A$$
$$\overline{X} = \overline{X'} + A$$

۱۵. میانه :

* پس از مرتب کردن داده ها ، مقداری که تعداد داده های بعد از آن با تعداد داده های قبل آن برابر است را میانه می نامیم و آن را با Q_2 نشان می دهیم.

* اگر تعداد داده ها فرد باشد ، دادهٔ وسط میانه و اگر زوج باشد ، میانگین دو دادهٔ وسط را به عنوان میانه انتخاب می کنیم.

* در هنگام وجود داده های دورافتاده ، از میانه استفاده می کنیم چون برخلاف میانگین از داده های دورافتاده تأثیر نمی پذیرد.

* در میانه نیز اگر داده ها در عدد **a** ضرب و با عدد **b** جمع شوند ، میانه هم در **a** ضرب و با **b** جمع می شود.

۱۶. دامنهٔ تغییرات :

* ساده ترین معیار پراکندگی

* مقدار آن برابر اختلاف بزرگترین و کوچکترین دادهٔ آماری است.

R = بزرگ ترین داده – کوچک ترین داده

* یکی از مشکلات دامنهٔ تغییرات این است که فقط به بزرگ ترین و کوچک ترین داده وابسته است. (بقیهٔ داده ها مهم نیست).

۱۷. انحراف معیار :

* جذر واریانس را انحراف معیار می نامیم و آن را با σ نشان می دهیم.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{X'})^2 + (x_2 - \overline{X'})^2 + \ldots + (x_n - \overline{X'})^2}{N}}$$

❊ اگر تمام داده ها برابر باشند ، انحراف معیار صفر می شود. (مثل واریانس)

❊ اگر تمام داده ها در a ضرب و با b جمع شوند ، انحراف معیار تنها در $|a|$ ضرب می شود.

۱۸. واریانس :

❊ شاخصی که میزان تغییرات داده ها نسبت به میانگین را به ما نشان می دهد.

❊ اختلاف هر دادهٔ آماری نسبت به میانگین را انحراف از میانگین می نامیم ، اما در همهٔ شرایط و برای تمام داده های آماری مجموع اختلاف داده ها از میانگین برابر صفر است. $(x_1 - \overline{X}) + (x_2 - \overline{X}) + \ldots + (x_n - \overline{X}) = 0$

❊ واریانس میانگین مجذور اختلاف داده ها از میانگین است و آن را با σ^2 نمایش می دهیم :

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{X})^2 + (x_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (x_n - \overline{X})^2}{N}$$

❊ بزرگی واریانس نشانهٔ پراکندگی بیشتر و کوچکی آن نشانهٔ پراکندگی کمتر است.

❊ واحد واریانس = توان دوم واحد داده های آماری

❊ روش دیگری برای محاسبهٔ واریانس : $\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{N} - \overline{X}^2$

نکته : اگر x_i طول اضلاع مربع هایی باشد ، $\overline{X}$ میانگین طول اضلاع ، $4\overline{X}$ میانگین محیط مربع ها $\sum x_i$ مجموع طول اضلاع $\sum x_i^2$ مجموع مساحت ها و $\frac{\sum x_i^2}{N}$ میانگین مساحت مربع ها است.

❊ اگر تمام داده ها در a ضرب و با b جمع شوند ، واریانس تنها در a^2 ضرب می شود.

❊ اگر تمام داده ها برابر باشند ، واریانس صفر می شود.

❊ مشکل واریانس : چون میانگین مجذور اختلاف از میانگین است ، پراکندگی را بیش از حد نشان می دهد.

۱۹. ضریب تغییرات :

❊ نسبت انحراف معیار به میانگین است که با علامت CV نمایش داده می شود. و معمولاً به صورت درصد بیان می شود. $CV = \frac{\sigma}{\overline{X}}$

❊ چون ضریب تغییرات بدون یکاست ، بین داده های آماری با واحدهای اندازه گیری متفاوت بسیار کارآمد است.

❊ اگر تمام داده ها برابر باشند ، ضریب تغییرات صفر می شود. (مانند واریانس و انحراف معیار)

* **اگر تمام داده ها در عددی مثبت $(a>0)$ ضرب شوند ، ضریب تغییرات ، تغییر نمی کند، اما اگر در عددی منفی $(a<0)$ ضرب شوند ، ضریب تغییرات قرینه می شود :**

$$x_i' = ax_i \Rightarrow \begin{cases} \sigma' = |a|\sigma \\ \overline{X}' = a\overline{X} \end{cases} \xrightarrow{cv=\frac{\sigma}{\overline{X}}} (cv)' = \frac{|a|}{a}cv \Rightarrow \begin{cases} a>0 \Rightarrow (cv)' = (cv) \\ a<0 \Rightarrow (cv)' = -(cv) \end{cases}$$

* **اگر تمام داده ها با b جمع شوند :** $\begin{cases} b>0 & \text{ضریب تغییرات کوچک می شود.} \\ b<0 & \text{ضریب تغییرات بزرگ می شود.} \end{cases}$

تذکر : نیازی به حفظ نکتهٔ فوق نیست و با عددگذاری و مثال زدن می توان ، اینگونه مسائل را تحلیل کرد.

۲۰. چارک ها :

* **اگرداده های آماری را مرتب کنیم ، چارک ها (چارک اول ، دوم و سوم) مقادیری هستند که داده ها را به چهار قسمت تقریباً مساوی تقسیم می کنند.**

* $\begin{cases} \text{چارک اول} \Rightarrow Q_1 \\ \text{چارک دوم = میانه} \Rightarrow Q_2 \\ \text{چارک سوم} \Rightarrow Q_3 \end{cases}$

* **همانند میانه با توجه به تعداد داده ها ، چارک ها می توانند خود داده ها نباشند و در فاصلهٔ دو دادهٔ متوالی قرار داشته باشند.**

* **اگر داده ها برابر باشند** $\Leftarrow Q_1 = Q_2 = Q_3$

* **اگر تمام داده ها در a ضرب و با b جمع شوند، چارک ها نیز در a ضرب و با b جمع می شوند.**