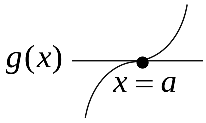
۱. تعبیر هندسی معادله : جواب های معادله $f(x)=g(x)$ $\xrightarrow{\text{همان}}$ طول برخورد (تلاقی) نمودارهای $y=f(x)$ و $y=g(x)$

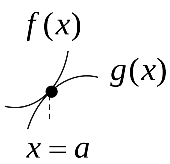
۲. دو نوع ریشهٔ حقیقی داریم $\Leftarrow$
- ریشه ساده $\Leftarrow$ تکراری نیست $\Leftarrow$ $(x-a)^1=0$
- ریشه تکراری
  - تکراری مرتبهٔ فرد
  - تکراری مرتبهٔ زوج $\Leftarrow$ دو مرتبه تکرار ، یعنی مضاعف

۳. به طور کلی اگر معادلهٔ $f(x)=g(x)$ دو نمودار در آن نقطه بر هم مماس اند. ریشهٔ تکراری داشته باشد. $\longrightarrow$
- ریشهٔ تکراری مرتبهٔ زوج : مماس برگشتی
- ریشهٔ تکراری مرتبهٔ فرد : مماس عبوری

ریشهٔ تکراری مرتبهٔ فرد : مماس عبوری



ریشهٔ تکراری مرتبهٔ زوج : مماس برگشتی



۴. ریشه های (جواب های) معادله $f(x)=0$ $\xrightarrow{\text{یعنی}}$ نقاط برخورد نمودار $y=f(x)$ با محور x ها (خط $y=0$)

۵. تعبیر هندسی نامعادله :
- مجموعه جواب های نامعادله $f(x)>g(x)$ $\Leftarrow$ بازه ای که ،نمودار $y=f(x)$ بالای نمودار $y=g(x)$ قرار می گیرد.
- مجموعه جواب های نامعادله $f(x)<g(x)$ $\Leftarrow$ بازه ای که ،نمودار $y=f(x)$ زیر نمودار $y=g(x)$ قرار می گیرد.
- مجموعه جواب های نامعادله $f(x)\ge g(x)$ $\Leftarrow$ بازه ای که ،نمودار $y=f(x)$ زیر نمودار $y=g(x)$ قرار نمی گیرد.
- مجموعه جواب های نامعادله $f(x)>0$ $\Leftarrow$ بازه ای که ،نمودار $y=f(x)$ بالای محور x ها قرار می گیرد.
- مجموعه جواب های نامعادله $f(x)\le 0$ $\Leftarrow$ بازه ای که ،نمودار $y=f(x)$ بالای محور x ها قرار نمی گیرد.

۶. معادله درجه ۱ (خطی)

❋ معادلاتی به فرم $ax+b=0$ (با شرط $a\neq 0$)

❋ همواره دقیقاً یک جواب دارند : $x=-\dfrac{b}{a}$

❋ تعبیر هندسی : طول نقطهٔ برخورد هر خطی با شیب غیرصفر با محور x ها

$*\quad ax+b=0:$
- $a\neq 0 \xrightarrow{\text{معادله درجه ۱}} x=-\dfrac{b}{a}$ (دقیقاً یک جواب)
- $a=0\ ,\ b\neq 0 \xrightarrow{\text{معادله ممتنع !!}}$ فاقد جواب
- $a=0\ ,\ b=0 \xrightarrow{\text{معادله مبهم !!}}$ بی شمار جواب $(x\in\mathbb{R})$

۷. نامعادله درجه ۱ : برای حل آن مانند معادله درجه یک عمل می کنیم ، با این تفاوت که اگر طرفین نامعادله را در عددی منفی ضرب یا تقسیم کنیم ، جهت نامساوی تغییر می کند.

نکته : برای حل نامعادلات درجه ۱ ، برخلاف نامعادلات درجه ۲ و کسری ، نیازی به جدول تعیین علامت نیست ، مگر این که نامعادله علاوه بر عبارت درجه ۱ ، شامل عبارت های دیگری نیز باشد.

x	$-\infty$	$x=-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$y=ax+b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

۸. ۵+۱ روش حل معادله درجه دوم : معادله $ax^2+bx+c=0$ با شرط $a\neq 0$ ، یک معادله درجه دوم است که : $\Leftarrow$

$$\begin{cases} a: \text{ضریب } x^2 \\ b: \text{ضریب } x \\ c: \text{عدد ثابت} \end{cases}$$

روش Δ (روش کلی) :

$$\Delta=b^2-4ac\ ,\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow\begin{cases}\Delta>0\Rightarrow \text{۲ ریشهٔ حقیقی ساده و متمایز} \\ \Delta=0\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\quad \text{۱ ریشهٔ مضاعف حقیقی} \\ \Delta<0\Rightarrow \text{ریشهٔ حقیقی ندارد.}\end{cases}$$

اگر a, c مختلف العلامت باشند $\Leftarrow a.c<0 \Leftarrow -4ac>0 \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac}$ قطعاً $\Delta>0$ خواهد بود و معادله **۲** ریشه دارد.

روش های سرعتی :

روش اول : اگر $c=0$ باشد ، کافی است از x فاکتور بگیریم که قطعاً یک جواب $x=0$ خواهد بود.

$$ax^2+bx=0\Rightarrow x(ax+b)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{یا}\\ x=-\frac{b}{a}\end{cases}$$

روش دوم : اگر $b=0$ باشد ، یا معادله به فرم $(....)^2=k$ باشد ، ساده تر است که از خاصیت ریشه زوج استفاده کنیم.

$$\begin{cases}u^2=k\xrightarrow{k>0}u=\pm\sqrt{k}\\ u^2=k\xrightarrow{k<0}\text{جواب ندارد.}\\ u^2=0\Rightarrow u=0\quad\text{ریشهٔ مضاعف}\end{cases}$$

روش سوم : اگر مجموع ضرایب معادله ، صفر باشد $\xrightarrow{(a+b+c=0)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{array} \right.$ و

روش چهارم : اگر بین ضرایب معادله رابطهٔ $a+c=b$ برقرار باشد $\Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{array} \right.$

روش پنجم : اگر روش های اول تا چهارم امکان پذیر نباشد و نیز $a=1$ باشد ، شاید بتوان به کمک تجزیه با اتحاد جمله مشترک ، زودتر از روش Δ به جواب رسید در غیر این صورت از همان روش Δ استفاده می کنیم.

۹. حل معادله درجه ۲ به روش تغییر متغیر : (عبارتی را به عنوان u یا t در نظر می گیریم.)

چند تغییر متغیر معروف :
$$\left\{ \begin{array}{l} ax^4 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=u} au^2 + bu + c = 0 \\ ax^6 + bx^3 + c = 0 \xrightarrow{x^3=u} au^2 + bu + c = 0 \\ ax^2 + b|x| + c = 0 \xrightarrow{|x|=t} at^2 + bt + c = 0 \\ ax + b\sqrt{x} + c = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} at^2 + bt + c = 0 \end{array} \right.$$

۱۰. حل نامعادله درجه دوم برخلاف نامعادله درجه **۱** ، به جدول تعیین علامت نیاز دارد.

※ $\Delta > 0 \Leftarrow$ عبارت درجه **۲** دارای **۲** ریشهٔ ساده است :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

※ $\Delta = 0 \Leftarrow$ عبارت درجه **۲** ، ریشهٔ مضاعف دارد :

x	$-\infty$	ریشهٔ مضاعف $x = -\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

※ $\Delta < 0 \Leftarrow$ عبارت درجه **۲** ، فاقد ریشه است :

x	$-\infty$ $+\infty$
$y = ax^2 + bx + c$	موافق علامت a

*** جدول بررسی مسائل علامت یک عبارت درجه دوم ، در مواجه با کلمهٔ < همواره > یا** <به ازای جمیع مقادیر x >

(مراجعه به صفحهٔ بعدی)

<table>
<tr><th>شرط هایی که باید اعمال کنید و اشتراک بگیرید.</th><th>جدول تعیین علامت</th><th>بیان فارسی
$p(x)=ax^2+bx+c$</th></tr>
<tr><td>$\Delta<0$
$a>0$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline p(x) & + & +++ & + \end{array}$</td><td>همواره مثبت
همواره بالای محورx ها
$p(x)>0$</td></tr>
<tr><td>$\Delta<0$
$a<0$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline p(x) & - & --- & - \end{array}$</td><td>همواره منفی
همواره زیر محورx ها
$p(x)<0$</td></tr>
<tr><td>$\Delta\leq0$
$a>0$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -\frac{b}{2a} & +\infty \\ \hline p(x) & + & 0 & + \end{array}$ یا $\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline p(x) & + & + & + \end{array}$</td><td>همواره نامنفی
هیچگاه زیر محورx ها نباشد.
$p(x)\geq0$</td></tr>
<tr><td>$\Delta\leq0$
$a<0$</td><td>$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -\frac{b}{2a} & +\infty \\ \hline p(x) & - & 0 & - \end{array}$ یا $\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline p(x) & - & - & - \end{array}$</td><td>همواره نامثبت
$p(x)\leq0$</td></tr>
</table>

۱۱. روابط بین ریشه ها : (α و β دو ریشهٔ معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ ($\Delta>0$ و $a\neq0$) می باشند.)

تذکر خیلی مهم : فقط موارد **۱** تا **۵** زیر را به خاطر بسپارید، در موارد **۶** تا **۹** روش حل را یاد بگیرید :

۱) مجموع ریشه ها $:S=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

۲) حاصل ضرب ریشه ها $:P=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

۳) قدرمطلق تفاضل ریشه ها $:q=|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴) مجموع مربعات (مجذور) ریشه ها $:\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P$

۵) مجموع مکعبات ریشه ها $:\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3SP$

۶) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(S^2-2P)^2-2P^2$

۷) $\alpha^5+\beta^5=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

۸) $\alpha^6+\beta^6=(\alpha^2+\beta^2)^3-3\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)=(S^2-2P)^3-3P^2(S^2-2P)$

۹) مجموع یا تفاضل جذر ریشه ها $:\left|\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}\right|=A\Rightarrow A^2=\alpha\pm2\sqrt{\alpha\beta}+\beta=S\pm2\sqrt{P}\xrightarrow{A>0}A=\sqrt{S\pm2\sqrt{P}}$

۱۲. ریشه های معادلهٔ درجه دوم :

قرینهٔ هم باشند:
- شرط اول : $b=0$
- شرط دوم : $ac<0$ (یعنی a و c مختلف العلامت باشند که همان $\Delta>0$ است).

معکوس هم باشند:
- شرط اول : $a=c$
- شرط دوم : $\Delta>0$

یادداشت : در حل مسائل نکتهٔ (**۱۲**) با شرط اول مجهول را به دست آورده و آن را در معادله جایگذاری می کنیم و سپس بررسی می کنیم که آیا شرط دوم صادق است یا خیر. از گزینه هایی مانند «هیچ مقدار **m**» در این سوالات بترسید !!!

۱۳. جدول علامت ریشه های معادلهٔ درجه دوم : (اگر $P\leq 0$ باشد ، شرط $\Delta>0$ خود به خود برقرار است)

علامت ریشه ها	شرایط لازم و کافی
دو ریشهٔ مختلف العلامت	$P<0$ (برررسی شرایط $\Delta>0$ لازم نیست.)
دو ریشهٔ هم علامت	$\Delta>0\ ,\ P>0$
دو ریشهٔ مثبت	$S>0\ ,\ P>0\ ,\ \Delta>0$
دو ریشهٔ منفی	$S<0\ ,\ P>0\ ,\ \Delta>0$
یک ریشهٔ صفر و یک ریشهٔ مثبت	$S>0, P=0 (c=0)$ (شرط $\Delta>0$ لازم نیست.)
یک ریشهٔ صفر و یک ریشهٔ منفی	$S<0, P=0 (c=0)$ (شرط $\Delta>0$ لازم نیست.)

۱۴. معادلهٔ درجه ۴ دو مجذوری :

$$*1*\quad ax^4+bx^2+c=0 \xrightarrow{x^2=t} *2*\ at^2+bt+c=0$$

شرایط معادله ※۲※	تعداد ریشه های معادله ※۱※
دارای دو ریشهٔ مثبت $(S>0\ ,\ P>0\ ,\ \Delta>0)$	دارای چهار ریشهٔ حقیقی ساده
دارای یک ریشهٔ صفر و یک ریشهٔ مثبت $(S>0\ ,\ P=0)$	دارای سه ریشهٔ حقیقی ساده
دارای دو ریشهٔ مختلف العلامت $(P<0)$ یا یک ریشهٔ مضاعف مثبت $(-\frac{b}{2a}>0\ ,\ \Delta=0)$	دارای دو ریشهٔ حقیقی ساده
دارای یک ریشهٔ مضاعف صفر $(b=c=0)$ یا دارای یک ریشهٔ منفی و یک ریشهٔ صفر $(S<0\ ,\ P=0)$	دارای یک ریشهٔ حقیقی ساده
فاقد ریشهٔ حقیقی $(\Delta<0)$ یا دارای دو ریشهٔ سادهٔ منفی یا یک ریشهٔ مضاعف منفی	فاقد ریشهٔ حقیقی

نکات تکمیلی معادلهٔ درجه ۴ دو مجذوری :

※ ریشه های غیر صفر معادلهٔ درجه ۴ دو مجذوری همواره قرینهٔ یکدیگرند ، پس مجموع ریشه ها در این معادلات همواره برابر صفر است.

$$\begin{cases} x^2 = t_1 \xrightarrow{t_1 > 0} x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1} \\ x^2 = t_2 \xrightarrow{t_2 > 0} x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

※ در بالا گفتیم مجموع ریشه ها صفر است ، اما بدان و آگاه باش که مجموع مربعات و حاصل ضرب ریشه ها صفر نیست !

$$\begin{cases} x_1.x_2.x_3.x_4 = \sqrt{t_1} \times (-\sqrt{t_1}) \times \sqrt{t_2} \times (-\sqrt{t_2}) = t_1 t_2 = \dfrac{c}{a} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = t_1 + t_1 + t_2 + t_2 = 2(t_1 + t_2) = 2 \times \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

نتیجه ۱. حاصل ضرب ۴ ریشهٔ معادلهٔ درجه ۴ دو مجذوری ، همان حاصل ضرب دو ریشه معادلهٔ درجه دوم و برابر $\frac{c}{a}$ است. اما مجموع ریشه ها صفر است.

نتیجه ۲. در معادلهٔ درجه دوم ، مجموع مربعات ریشه ها $S^2 - 2P$ بود ، اما در معادلهٔ درجه ۴ دو مجذوری (با شرط ۴ ریشهٔ متمایز) ، مجموع مربعات ریشه ها $2S$ است. ($S = -\frac{b}{a}$ در معادلهٔ ۲ بالا !)

تذکر : حفظ کردن نتایج بالا می تواند خسته کننده ، خطرآفرین و استرس زا نیز باشد ، آن ها را بفهمید و یاد بگیرید.

۱۵. $ax^2 + b|x| + c = 0 \xrightarrow{|x|^2 = x^2} a|x|^2 + b|x| + c = 0 \xrightarrow{|x| = t} at^2 + bt + c = 0$

نکته : معادلهٔ بالا بین صفر تا ۴ ریشهٔ حقیقی می تواند داشته باشد.
جدول شرایط تعداد ریشه های این معادله ، دقیقاً مشابه معادلهٔ درجه ۴ دو مجذوری است.

۱۶. $*1*\ \ ax + b\sqrt{x} + c = 0 \xrightarrow{t=\sqrt{x}} *2*\ at^2 + bt + c = 0 \Rightarrow$ می تواند از صفر تا دو جواب داشته باشد.

نکته در معادلهٔ بالا :

وقتی معادلهٔ ۱ : دو ریشهٔ حقیقی دارد که معادلهٔ ۲ ، دو ریشهٔ مثبت یا صفر داشته باشد : $\left.\begin{matrix} \Delta > 0 \\ P \ge 0 \\ S > 0 \end{matrix}\right\}$

وقتی معادلهٔ ۱ : دو ریشهٔ حقیقی دارد که معادلهٔ ۲ ، دو ریشهٔ مختلف العلامت داشته باشد : $(P < 0)$ یا یک ریشهٔ مثبت مضاعف داشته باشد. $(-\frac{b}{a} > 0 \ \ ,\ \ \Delta = 0)$

۱۷. اگر S و P به ترتیب مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادلهٔ درجه دومی باشند ، آن معادله به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ خواهد بود.

※ جدول نوشتن معادلهٔ جدید به روش سرعتی در موارد خاص (معادلهٔ اولیه $ax^2 - bx + c = 0$)

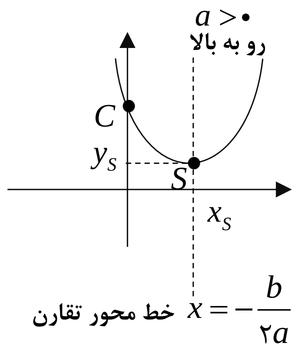
ویژگی های معادلهٔ جدید	تبدیل مناسب	معادلهٔ جدید
ریشه هایش k واحد از ریشه های معادلهٔ قبل بیشتر باشد.	$x \longrightarrow x-k$	$a(x-k)^2+b(x-k)+c=0$
ریشه هایش k برابر ریشه های معادلهٔ قبل باشد.	$x \longrightarrow \frac{x}{k}$	$a(\frac{x}{k})^2+b(\frac{x}{k})+c=0$
ریشه هایش قرینهٔ ریشه های معادلهٔ قبل باشد.	$x \longrightarrow -x$ (فقط b را قرینه می کنیم.)	$ax^2-bx+c=0$
ریشه هایش معکوس ریشه های معادلهٔ قبل باشد.	$x \longrightarrow \frac{1}{x}$ (عوض کردن جای a و c)	$cx^2+bx+a=0$

۱۸. با داشتن دو ریشه یک معادلهٔ درجه دوم ، می توان S و P را محاسبه کرد و طبق نکتهٔ (**۱۷**) معادله را نوشت. اما اگر یکی از ریشه ها را به ما دادند ، و از ما خواستند تا معادلهٔ درجه دوم را مشخص کنیم ، کافی است که ریشه را برابر x قرار دهیم و اگر گویا نبود آن را با به توان رساندن گویا کنیم تا معادله به دست آید.

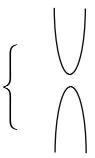
نکته : در این تیپ مسائل اگر یک ریشه معادلهٔ درجه دومی ، $a+\sqrt{b}$ باشد و تأکید شود ضرایب معادله گویا هستند ، حتماً ریشهٔ دیگر $a-\sqrt{b}$ است و به راحتی می توان S و P را به دست آورد و معادلهٔ $x^2-Sx+P=0$ را نوشت.

۱۹. مشخصات سهمی :

$$S\left|\begin{array}{l} x=-\dfrac{b}{2a} \\ y=-\dfrac{\Delta}{4a} \end{array}\right.$$



فرم گسترده : $ax^2+bx+c=0 \quad ; \quad a\neq 0$

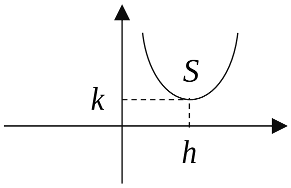
شکل نمودار : 
$; \quad a>0 \Rightarrow$ برد $=[\min,+\infty)$
$; \quad a<0 \Rightarrow$ برد $=(-\infty,\max]$

مختصات رأس سهمی :
$$\begin{cases} x_S=\dfrac{-b}{2a} & \text{طول رأس} \\ y_S=f(\dfrac{-b}{2a})=\dfrac{-\Delta}{4a} & \text{عرض رأس} \end{cases}$$

محور تقارن سهمی : خط $x=\dfrac{-b}{2a}$

$$\begin{cases} a>0 \xrightarrow{\text{رو به بالا}} y(\dfrac{-b}{2a})=\dfrac{-\Delta}{4a} & \text{مقدار تابع } \min \\ a<0 \xrightarrow{\text{رو به پایین}} y=f(\dfrac{-b}{2a})=\dfrac{-\Delta}{4a} & \text{مقدار تابع } \max \end{cases}$$

۲۰. مشخصات سهمی در فرم مربع : $y=a(x-h)^2+k \quad ; \quad a\neq 0$



$S(h,k) \Rightarrow \begin{cases} \text{محور تقارن سهمی} : x = h \\ \text{مقدار سهمی} \underset{\downarrow}{\max} \qquad \underset{\downarrow}{\min} \; : y = k \end{cases}$

$a < 0$ رو به پایین — $a > 0$ رو به بالا

تذکر : مشخص کردن نقطهٔ برخورد نمودار یک سهمی با محور y ها ، در عین سادگی (جایگذاری $x = 0$) خیلی مهم است.

۲۱ . مشخصات سهمی در فرم دو پرانتزی :

$$\begin{cases} \text{فرم} : y = a(x - x_1)(x - x_2) + k \;,\; (a \neq 0 \;,\; x_1 , x_2 , k \in \mathbb{R}) \\ \text{مختصات رأس} \Rightarrow \begin{cases} x_S = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{\text{مجموع ریشه های داخل پرانتز}}{2} \\ y_S = f(\dfrac{x_1 + x_2}{2}) \end{cases} \\ k = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$k = 0 \Rightarrow$ x_1 , x_2 همان ریشه های معادلهٔ $f(x) = 0$ ، نقاط برخورد سهمی با محور x ها هستند.

۲۲. دو نکتهٔ خاص در مورد **min** و **max** :

⁕ اگر مجموع چند عبارت مثبت عدد ثابتی باشد ، وقتی حاصل ضرب آن ها ماکزیمم است که با هم برابر باشند :

$$x + y = c \xrightarrow{x = y = \frac{c}{2}} (xy)_{\max} = \frac{c}{2} \times \frac{c}{2} = \frac{c^2}{4}$$

⁕ اگر حاصل ضرب چند عبارت مثبت برابر مقدار ثابتی باشد ، وقتی مجموع آن ها مینیمم است که با هم برابر باشند :

$$xy = c \xrightarrow{x = y = \sqrt{c}} (x + y)_{\min} = \sqrt{c} + \sqrt{c} = 2\sqrt{c}$$

۲۳. نوشتن معادلهٔ سهمی بر اساس مشخصاتی معلوم از آن :

مشخصات داده شده در مسئله	فرم پیشنهادی برای نوشتن معادلهٔ سهمی	شیوهٔ کار
مختصات سه نقطه از سهمی	$y = ax^2 + bx + c$ فرم گسترده	تشکیل سه معادله و سه مجهول و محاسبهٔ a و b و c و به دست آوردن ضابطه
مختصات رأس سهمی $(S(h,k))$ و یک نقطهٔ دیگر از سهمی	$y = a(x - h)^2 + k$ فرم مربع	محاسبهٔ a با قراردادن مختصات نقطه ای معلوم غیر از رأس در ضابطه (مثلاً نقاط برخورد با محورها)
ریشه های سهمی (α, β) و یک نقطهٔ دیگر از سهمی	$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$	محاسبهٔ a با قراردادن مختصات نقطه ای غیر از ریشهٔ آن در ضابطهٔ سهمی

نکته :

* گاهی طول رأس $x=h$ را نداده اند ، اما در عوض ریشه های معادله (برخورد با محورx ها) معلوم است و ما به خاطر تقارن می دانیم که رأس وسط دو ریشه است. با معلوم شدن طول رأس و معلوم بودن عرض رأس ، می توان معادلهٔ سهمی را به فرم مربع $y=a(x-h)^{2}+k$ نوشت.

* گاهی یک ریشه و محور تقارن را می دهند ، که ما با توجه به تقارن سهمی ، می توانیم ریشهٔ دیگر را محاسبه کرده و از فرم دو پرانتزی ، ضابطه را به دست آوریم.

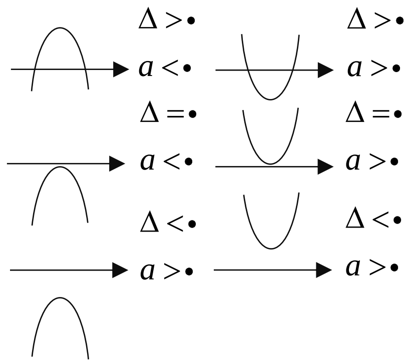
۲۴. وضعیت نمودار سهمی

$y=ax^{2}+bx+c$ با محور x ها :

* $\Delta>0 \Leftarrow$ محور x ها را در دو نقطه قطع می کند $\Leftarrow$

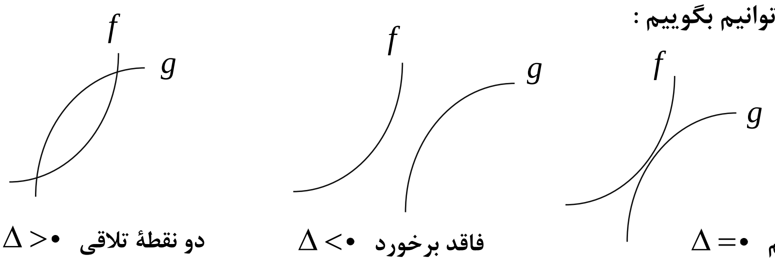
* $\Delta=0 \Leftarrow$ مماس بر محور x ها $\Leftarrow$

* $\Delta<0 \Leftarrow$ محور x ها را قطع نمی کند $\Leftarrow$



۲۵. وضعیت نمودار یک سهمی با خط یا سهمی دیگر : به معادلهٔ $f(x)=g(x)$ یا همان $f-g=0$ معادلهٔ برخورد دو تابع می گوییم ،

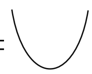
حال اگر $f-g=0$ ، درجه **۲** باشد ، با توجه به Δ می توانیم بگوییم :

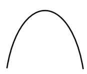


دو نقطهٔ تلاقی $\Delta>0$ فاقد برخورد $\Delta<0$ مماس برهم $\Delta=0$

۲۶. تشخیص علامت **c ، b ، a** و Δ از روی نمودار سهمی $y=ax^{2}+bx+c$

علامت **a** :

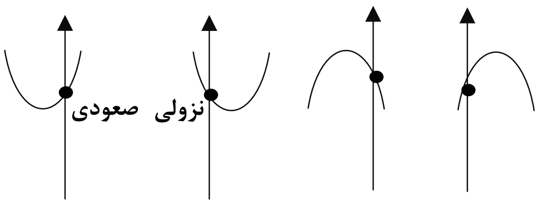
سهمی رو به بالا $\Leftarrow$  $\Leftarrow a>0$

سهمی رو به پایین $\Leftarrow$  $\Leftarrow a<0$

علامت **b** :

روش اول : با توجه به علامت طول رأس $(x=\frac{-b}{2a})$ و داشتن علامت **a** ، علامت **b** را به دست می آوریم.

روش دوم : که راحت تر است ! این است که اگر در نقطهٔ برخورد نمودار با محور y ها ، نمودار صعودی باشد ، $b>0$ و اگر نزولی بود $b<0$ است.



$a>0,b>0$ $a>0,b<0$ $a<0,b<0$ $a<0,b>0$

علامت **c** : عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور y هاست $(x=0)$ اگر بالاتر از مبدأ باشد $c>0$ و اگر پایین تر از مبدأ باشد $c<0$ است و اگر از خود مبدأ عبور کرده باشد ، $c=0$ است.

علامت Δ :

دو نقطهٔ برخورد با محور x ها $\Leftarrow \Delta>0$

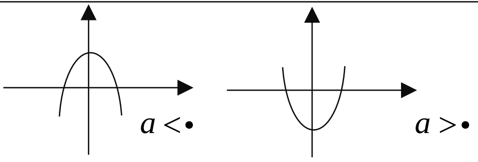
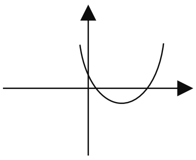
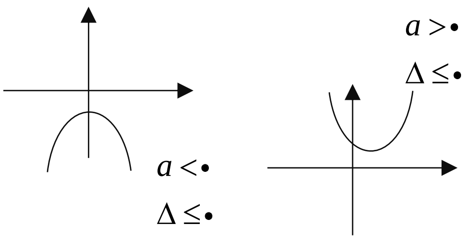
مماس بر با محور x ها $\Leftarrow \Delta=0$

فاقد برخورد با محور x ها $\Leftarrow \Delta<0$

یادداشت : در مسائل مجهول دار (m یا ...) که قرار است با نکتهٔ (26) حل شوند ، یعنی نمودار را بدهند و حدود m را بخواهند ، علامت های a و b و c و Δ را مشخص می کنیم. اگر $ac<0$ شرط $\Leftarrow \Delta>0$ لازم نیست.

نکته : اگر a و c مختلف العلامت باشند $(p<0) \Leftarrow$
- نمودار دو ریشهٔ مختلف العلامت دارد (نیازی به بررسی شرط $\Delta>0$ نیست).
- نمودار از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصاتی می گذرد.

.۲۷

ویژگی ریشه ها	ناحیه های عبوری نمودار	توضیحات	نمودار
دو ریشهٔ مختلف العلامت $(p<0)$	از هر ۴ ناحیه می گذرد	بررسی شرط $\Delta>0$ لازم نیست.	
دو ریشهٔ هم علامت $(\Delta>0\ ,\ P>0)$	نمودار از ۳ ناحیه می گذرد و از ۱ ناحیه نمی گذرد.	با توجه به این که نمودار از کدام ناحیه نمی گذرد علامت a و b و c رامشخص می کنیم.	
در حالت $\Delta\le 0$	نمودار تنها از دو ناحیه می گذرد.	$a>0 \Leftarrow$ ناحیهٔ یک و دو $a<0 \Leftarrow$ ناحیهٔ سه و چهار	

.۲۸ رسم نمودار سهمی به کمک انتقال $(k,h>0)$ **:**

$y=a(x\pm h)^2\pm k \longrightarrow$ k واحد بالا (+) یا پایین (−)

$\pm h \longrightarrow$ h واحد به چپ (+) یا راست (−)

$a \longrightarrow$ $a>0$ رو به بالا، $a<0$ رو به پایین

.۲۹ معادلات گویا : یعنی معادلات کسری که صورت و مخرج آن ها چند جمله ای هستند. معمولاً برای حل ، طرفین وسطین می کنیم یا طرفین تساوی را در ک.م.م مخرج ها ضرب می کنیم، تا از حالت کسری خارج شود و در نهایت بررسی می کنیم که ریشه های به دست آمده ، مخرج هیچ کدام از کسرها را صفر نکند. (اگر صفر کرد غیرقابل قبول است).

حالت های متداول معدلات گویا :

$$\begin{cases} \dfrac{A}{B}=0 \Rightarrow A=0 \quad (B\neq 0 \text{ بررسی }) \\ \dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D} \Rightarrow \text{ طرفین وسطین } \Rightarrow AD=BC \\ \text{ شامل بیش از دو کسر } \Rightarrow \text{ دو طرف را در مخرج مشترک کلیهٔ کسرها ضرب می کنیم تا از حالت کسری خارج شوند. } \end{cases}$$

۳۰. اگر فردی کاری را در زمان t_1 انجام دهد و فرد دیگری همان کار را در زمان t_2 انجام دهد، آن گاه این دو نفر با هم آن کار را در زمان T انجام می دهند که : $\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}=\dfrac{1}{T}$

۳۱. حل نامعادلات گویا :

مرحلهٔ(**۱**) : همهٔ کسرها را به یک طرف منتقل می کنیم.

مرحلهٔ (**۲**) : مخرج مشترک می گیریم.

مرحلهٔ (**۳**) : جدول تعیین علامت را رسم می کنیم و جواب را به دست می آوریم.

تذکر : در حالت کلی برای حل نامعادلات گویا ، طرفین ، وسطین مجاز نیست ، مگر این که علامت مخرج همواره مثبت یا همواره منفی باشد، که در این صورت با درنظر گرفتن تغییر یا عدم تغییر جهت نامساوی و همچنین شرط صفر به عنوان مخرج ها ، طرفین وسطین می کنیم.

۳۲. تعیین علامت به روش سرعتی :

مرحلهٔ(**۱**) : عدد دلخواهی را در عبارت موردنظر جایگذاری می کنیم و علامت یک ستون را مشخص می کنیم.

مرحلهٔ (**۲**) : سپس یکی در میان علامت ستون ها را مشخص می کنیم.

تذکر : فقط توجه شود که ریشه های مضاعف (تکراری مرتبهٔ زوج ، $2n$) و ریشه های داخل قدرمطلق $(|u|)$ علامت ستون ها تغییر نمی کند و در جدول این ریشه ها را ستاره دار می کنیم.

۳۳. حل معادلات رادیکالی : معمولاً برای حل آن ها کافی است یک رادیکال را در یک طرف نگه داشته و سپس طرفین را به توان فرجهٔ رادیکال برسانیم تا رادیکال حذف شود.

نکته : اگر فرجهٔ رادیکال زوج بود در آخر جواب معادله را در معادلهٔ اصلی قرار می دهیم ، تا ببینیم صدق می کند یا خیر .

۳۴. تشخیص سریع جواب داشتن یک معادله و یا به دست آوردن تک جواب آن معادله :

❋ مجموع چند عبارت مثبت ، هیچگاه صفر یا منفی نمی شود.

❋ مجموع چند عبارت نامنفی ، فقط زمانی صفر می شود که همگی همزمان با هم صفر شوند.

* اگر $\sqrt{a}=b$ باشد ، می دانیم که باید هم $a\geq 0$ و $b\geq 0$ هم باشد. اگر حاصل اشتراک این دو تهی شود ، پس معادله جواب ندارد و اگر حاصل فقط یک عدد شود ، آن عدد را در معادله قرار می دهیم. اگر تساوی برقرار بود که آن عدد تنها جواب معادله است. و اگر حاصل فقط یک عدد شود ، آن عدد را در معادله قرار می دهیم. اگر تساوی برقرار بود که آن عدد تنها جواب معادله است.

۳۵. حل نامعادلات رادیکالی :

طرفین را به توان فرجهٔ رادیکال می رسانیم تا رادیکال از بین برود ، اما دو مورد زیر را باید خیلی دقت کرد :

اولاً : اگر رادیکال را در یک طرف و بقیه را به طرف دیگر منتقل کردیم ، باید حواسمان باشد که شرط به توان **۲** رساندن طرفین نامساوی ، مثبت بودن دو طرف است.

ثانیاً : باید دامنهٔ تعریف رادیکال را نیز لحاظ کنیم و با جواب نامعادله اشتراک بگیریم.