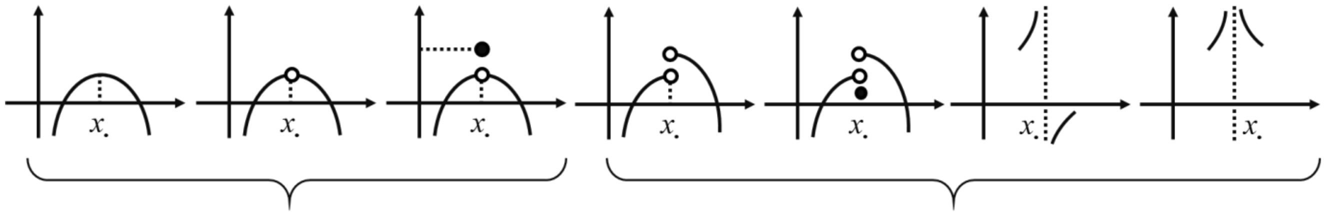
« حداقل مطالب ضروری حد و پیوستگی و مشتق برای نکته و تست وجمعبندی استاد سامان سلامیان »

❖ هدف از حد و پیوستگی ، حد در بی نهایت (مجانب ها) ، مشتق و کاربرد آن، رسم منحنی در صفحه مختصات است.

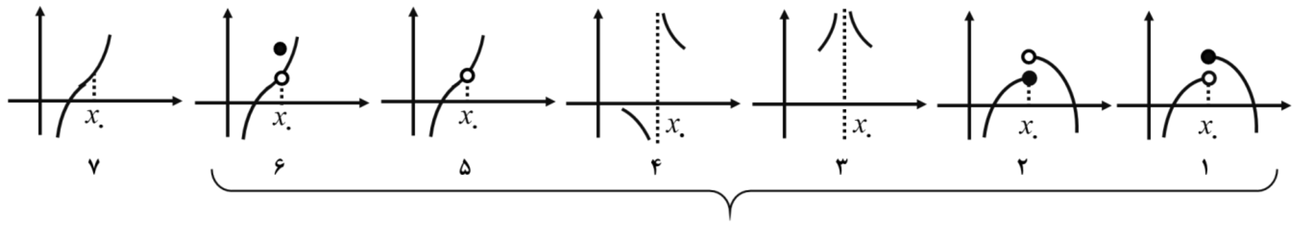
❖ حد در نقطه ی x_g ، یافتن عرض های دو طرف نقطه ی x_g است. با عرض خود نقطه ی x_g یعنی $f(x_g)$ هیچ کاری نداریم و فقط می خواهیم بدانیم که شاخه های منحنی ، در دو طرف نقطه ی x_g در یک تراز هستند یا خیر ؟ اگر بودند ، تابع در آن نقطه حد دارد و $l_1 = l_2$ (حد چپ و راست عدد برابر است و نه ∞ برابر) و اگر حد چپ و راست برابر نبودند و $l_1 \neq l_2$ شاخه های منحنی در نقطه ای به طول x_g ، هم تراز و هم عرض نیستند. حد از جنس y است. اگر حد چپ و راست در نقطه ی x_g عدد برابر (نه ∞ برابر) شد ، f در x_g حد دارد.



حد دار در x.　　　　حد ندار در x.

❖ پیوستگی در نقطه ی x_g ، به عرض خودِ نقطه ی x_g کاردارد و این که آیا $f(x_g)$ (که مقدار تابع در خودِ نقطه ی x_g است) با حد چپ یا حد راست تابع یا هر دو یا هیچ کدام برابر هست یا نه ؟ اگر حد چپ و راست با مقدار تابع در خودِ نقطه ی x_g برابر شد، تابع در x_g پیوسته (وصل) است. شرط پیوستگی در x_g : $l_1 = l_2 = f(x_g)$

1. ناپیوسته در x_g ولی پیوسته از راست. نقطه ی $(x_g, f(x_g))$ دست خود را از راست به بقیه تابع داده است.



ناپیوسته در x.

2. ناپیوسته در x_g ولی پیوسته از چپ. نقطه ی $(x_g, f(x_g))$ دست خود را از چپ به بقیه تابع داده است.

3. ناپیوسته در x_g و حد چپ و راست ∞ برابر

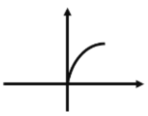
4. ناپیوسته در x_g و حد چپ و راست ∞ نابرابر

5. ناپیوسته در x_g ولی f در x_g حد دارد و مقدار ندارد.

6. ناپیوسته در x_g ولی f در x_g حد دارد و با مقدار تابع در خودِ x_g برابر نیست. (نه پیوستگی راست ، نه پیوستگی چپ)

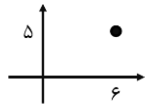
7. پیوسته در x_g . نقطه ی $(x_g, f(x_g))$ دست خود را از دو طرف چپ و راست به بقیه تابع داده است.

❖ اگر x_g یک نقطه ی دیواره ای دامنه باشد (نقطه ی ابتدا یا انتها) ، تابع یکی از حدهای چپ یا راست خود را از دست می دهد. لذا تابع در x_g ناپیوسته است. مثل : $f(x)=\sqrt{x}$ ، با دامنه ی $D_f=[\text{g},+\infty)$ و نمودار



که چون از سمت چپ صفر ، حد چپ ندارد ، در x_g پیوسته نیست. اگر نقطه ی x_g یک نقطه ی تنها باشد و در چپ و راست x_g تعریف نشده باشد چون حد چپ و راست ندارد ، ناپیوسته است.

مثل : که $f(۶)=۵$ و $D_f=\{۶\}$

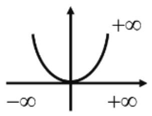


❖ پیوستگی در بازه $[a,b]$: اولاً تابع باید در نقاط همان بازه ی (a,b) وصل باشد ، ثانیاً $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ و $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$. دقت کنید اگر یکی از دیواره ها باز بود ، بررسی پیوستگی در آن نقطه لازم نیست. مثلاً در $[a,b)$ تنها پیوستگی راست در $x=a$ و نقاط بازه (a,b) لازم است.

❖ حد در بی نهایت و حد بی نهایت : اگر x به $\pm\infty$ میل کند حد در بی نهایت گرفته ایم. اما اگر جواب حد یعنی y بی نهایت شود ، گوییم حد بی نهایت داریم. پس : $x\to\pm\infty$: حد در بی نهایت $\qquad$ $y\to\pm\infty$: حد بی نهایت

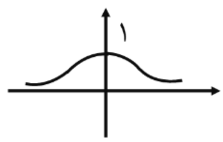
❖ حد بی نهایت : در توابع کسری وقتی $\dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر نسبی}}$ باشد، حد بی نهایت داریم که با تقسیم علامت عدد به علامت صفر نسبی جواب ∞ پیدا می شود. دقت کنید $\dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر مطلق}}$ تعریف نشده است. حد بی نهایت ممکن است در توابع غیرکسری هم رخ دهد.

مثلاً : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^۲=+\infty$ در این حد ، هم x و هم y ، ∞ شده است. یعنی حد در بی نهایت حد بی نهایت شده است. و معنی هندسی آن این است که تابع $y=x^۲$ در هر دو سوی محور x ها به $+\infty$ می رود و

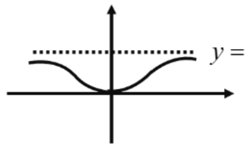


❖ حد در بی نهایت : اگر $x\to\pm\infty$ حد در بی نهایت داریم که ممکن است عدد یا ∞ باشد. اگر حد در $x\to\pm\infty$ برابر عدد معین $y=b$ شود و گوییم تابع در بی نهایت کنار (جنب) خط $y=b$ قرار می گیرد و $y=b$ برای آن مجانب افقی است. در توابع کسری وقتی درجه مخرج از صورت بیشتر است ($y=۰$) و یا صورت و مخرج هم درجه اند. ($y=\dfrac{a}{a'}$ ضریب قوی ترین درجه ی صورت به ضریب قوی ترین درجه ی مخرج) این اتفاق رخ می دهد. مثلاً :

$$y=\frac{۱}{۱+x^۲}\qquad \lim_{x\to\pm\infty} y=\frac{۱}{+\infty}=g$$



$$y=\frac{۲x^۲}{۳x^۲+۱}\qquad \lim_{x\to\pm\infty} y=\frac{۲x^۲}{۳x^۲}=\frac{۲}{۳}$$



در توابع کسری اگر درجه ی صورت بیشتر از مخرج باشد جواب ∞ است. مثلاً در تابع $y=\dfrac{x^۳}{x^۲+x}$ حد در ∞ برابر ∞ است.

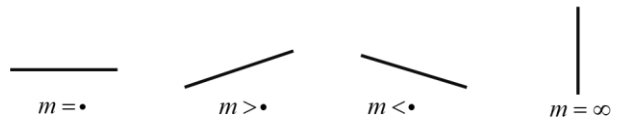
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+bx^{n-۱}+\dots}{a'x^m+b'x^{m-۱}+\dots} \;\vdots\vdots\; \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\text{پرتوان صورت}}{\text{پرتوان مخرج}}=\frac{ax^n}{a'x^m}=\frac{a}{a'}x^{n-m}=L$$

$$if\;\; n>m\;,\; if\;\; n=m : L=\frac{a}{a'}\;,\; if\;\; n<m : L=g$$

❖ برای حد در ∞ ، حد چپ و راست معنی ندارد.

مشتق : منظور از مشتق در هر نقطه شیب خط مماس بر تابع در آن نقطه است. مشتق را شیب خط مماس ترجمه می کنیم.

یادآوری :

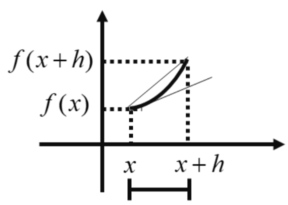


مشتق از جنس شیب است. شیب خط مماس بر منحنی است. خط مماس همان خط واصل است که دو نقطه ی به شدت به هم نزدیک را به هم وصل می کند.

تعریف مشتق یک مبهم $\frac{g}{g}$ است که برابر تانژانت زاویه ای است که خط مماس بر تابع در نقطه ی x_g با جهت مثبت محور x ها می سازد.

❖ اگر دو نقطه به طول های x و $x+h$ روی $y=f(x)$ در نظر بگیریم و آن دو نقطه را به هم وصل کنیم ، شیب خط واصل این دو نقطه وقتی به شدت به هم نزدیک می شوند ، شیب خط مماس بر f در x است.

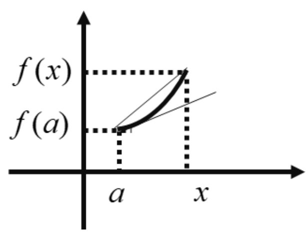
❖ تعریف مشتق تابع در حالت کلی :



نمو طولی $=h=\Delta x$

$$\lim_{h\to g}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{g}{g}=f'(x)$$

❖ تعریف مشتق تابع در نقطه ی a :



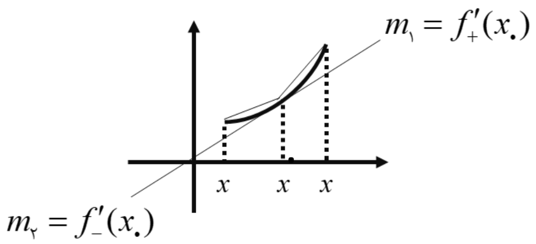
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{g}{g}=f'(a)$$

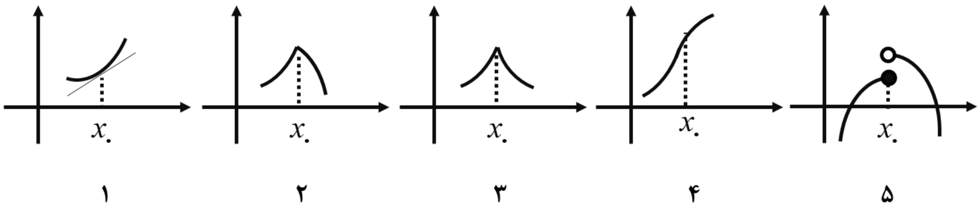
❖ تعریف مشتق چپ و راست در x_g :

$$\lim_{x\to x_g}\frac{f(x)-f(x_g)}{x-x_g}=\frac{g}{g}\begin{cases}x\to x_g^+ & m_1\\ x\to x_g^- & m_2\end{cases}$$

$if\ \underbrace{m_1=m_2}_{}\to$ مشتق پذیر x_0 در f

عدد برابر نه ∞ برابر





1. مشتق پذیر است و مشتق چپ و راست عدد برابر است.

2. مشتق ناپذیر و در x_g نقطه ی گوشه دارد

3. مشتق ناپذیر و در x_g مشتق چپ و راست ∞ نابرابر است. (مماس قائم)

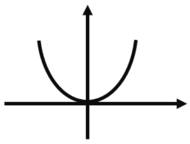
4. مشتق ناپذیر و در x_g مشتق چپ و راست ∞ برابر است. (مماس قائم)

5. مشتق ناپذیر و در x_g به علت ناپیوستگی مشتق ناپذیر است. اما چون در x_g پیوستگی چپ دارد و از چپ مشتق پذیر است: (فقط) ولی از راست مشتق پذیر نیست.

هر جا بتوان بر تابع مماس افقی کشید ، مشتق صفر است و برعکس مثل : $y=x^۲$ و $y=x^۳$ در مبدأ یا تابع ثابت .

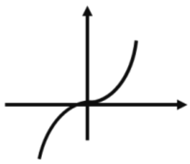
ساده

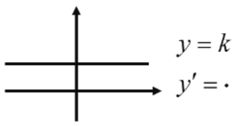
x	$-\infty$	۰	$+\infty$
$f'(x)=۲x$	$-$		$+$
$f(x)=x^۲$	$+\infty$ ↘	۰	↗ $+\infty$



مضاعف

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
$f'(۳x^۲)=۲x$	$+$		$+$
$f=x^۳$	$-\infty$ ↗	۰	↗ $+\infty$





$x_۰$ اکسترمم f است. ⟵ ریشه ساده یا فرد
$x_۰$اکسترمم f نیست. ⟵ ریشه مضاعف یا زوج

$y'=۰$ مماس افقی

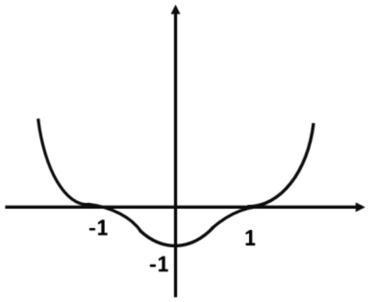
مثلاً اگر پرسیده شود که تابع $f(x)=(x^۲-۱)^۳$ چند مماس موازی محور طول ها دارد و چند اکسترمم کافی است از تابع مشتق بگیریم : $y'=۳(۲x)(x^۲-۱)^۲$

و چون گفته مماس موازی محور x ها یعنی مماس افقی با شیب صفر و y' را برابر صفر قرار بدهیم :

$$y'=۶x(x^۲-۱)^۲=۶x(x+۱)^۲(x-۱)^۲=۰\begin{cases}x=۰\\x=۱\\x=-۱\end{cases}$$

می بینیم 3 جا مماس افقی است. ولی چون فقط $x=۰$ ریشه ی ساده ی مشتق است، یک اکسترمم دارد.

x	$-\infty$		مضاعف -۱		ساده ۰		مضاعف ۱		$+\infty$
$y' = ۶x(x-۱)^۲(x+۱)^۲$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$y=(x^۲-۱)^۳$	$+\infty$	↘	۰	↘	-۱	↗	۰	↗	$+\infty$



قضیه : اگر f در x_{g} مشتق پذیر باشد ، آن گاه f در x_{g} پیوسته است.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \text{یک عدد معین} \to \lim_{x\to a} f(x)-f(a)=g$$
$$\to \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

f در a پیوسته است.

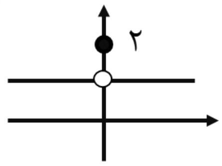
تست : اگر $\sqrt{۲} = \lim_{x\to ۷}\frac{f(x)-f(۷)}{x-۷}$ باشد ، حاصل $\lim_{x\to ۷} f(x)$ کدام است ؟

1) $f'(۷)$ 2) $f'(\sqrt{۲})$ 3) $f(۷)$ 4) 7

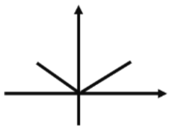
صفت مشتق پذیری f در یک نقطه یک صفت کامل تر از پیوستگی در x_{g} و حد دار بودن در x_{g} است.

حتما		شاید
	مشتق پذیر در x.	
↓ حتما	پیوسته در x.	↑ شاید
↓ حتما	حد دار در x.	↑ شاید

مثلاً $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x} & x\neq g\\ ۲ & x=g\end{cases}$ با این که در $x_g=g$ حد دارد ولی پیوسته نیست.



و یا $f(x)=|x|$ با این که در $x=g$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست زیرا مشتق چپ و راست در x_g متفاوت است.



اما $f(x)=x^۲$ که مثلاً در $x=۲$ مشتق پذیر است. در این نقطه حد دار و پیوسته هم هست.

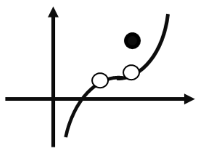
- توابع چندجمله ای ، $y=\sin^n ax$ و $y=\cos^n ax$ روی $\mathbb{R}$ یعنی بازه ی $(-\infty,+\infty)$ در تمام نقاط حد دار ، پیوسته و مشتق پذیرند.
- نقاط بحرانی : $C\in D_f$ بحرانی است اگر $f'(c)=۰$ و یا $f'(c)$ موجود نباشند. دقت کنید باید $C\in D_f$ باشد.

مثلاً $x=g$ برای $y=\frac{1}{x}$ یا $y=\frac{x}{x}$ بحرانی محسوب نمی شود.

$y=\frac{1}{x}$ اصلاً بحرانی ندارد و $y=\frac{x}{x}$ همه ی نقاطش بحرانی است مگر $x=g$ که در دامنه نیست.

نقطه ی ناپیوستگی بحرانی است ، به شرطی که طول آن در دامنه ی تابع باشد.

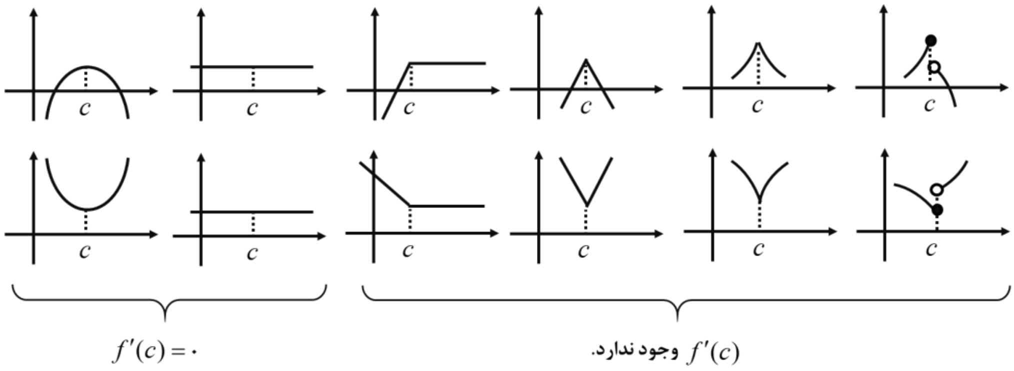
مثلاً در نمودار روبرو نقطه ی x_2 بحرانی است ولی x_1 خیر .



- در بازه ای که $y'>g$ است و تابع پیوسته ، تابع اکیداً صعودی است به شرطی که هیچ دو نقطه ای هم عرض نباشند.
- در بازه ای که $y'<g$ است و تابع پیوسته ، تابع اکیداً نزولی است به شرطی که هیچ دو نقطه ای هم عرض نباشند.
- در توابع چند ضابطه ای ، عرض نقاط تغییر ضابطه را باید یافت و تعریف صعودی یا نزولی را کنترل نمود.
- حضور مجانب قائم در یک بازه ی تابع را از رفتار یکنوا یا اکید در آن بازه خارج می کند. مثلاً $y=\frac{1}{x}$ با این که $y'=\frac{-1}{x^2}<g$ است اکید نزولی نیست زیرا در $x=g$ مجانب قائم دارد ولی مثلاً روی $(g,+\infty)$ یا $(-\infty,g)$ اکیداً نزولی است.
- اکسترمم های مطلق و نسبی : اکسترمم های نسبی را نسبت به یک همسایگی نقطه ی موردنظر می سنجند ولی اکسترممهای مطلق را نسبت به کل دامنه بررسی می کنند.

$f(c)$ ماکزیمم نسبی است $\quad$ $if \quad x\in(a,b) \quad , \quad f(c)\ge f(x)$

$f(c)$ مینیمم نسبی است. $\quad$ $if \quad x\in(a,b) \quad , \quad f(c)\le f(x)$



- ❖ در نقطه ی اکسترمم اصلاً لازم نیست f پیوسته یا مشتق پذیر باشد.
- ❖ تعداد نقاط اکسترمم نسبی و مطلق محدودیت ندارد. مثل $y=k$
- ❖ یک نقطه ی اکسترمم نسبی بحرانی است اما هر نقطه ی بحرانی اکسترمم نیست مثل $x=0$ در $y=x^3$
- ❖ اگر در نقطه ی اکسترمم مشتق موجود باشد ، برابر صفراست.