۱. زوج مرتب (x,y) نشان دهندهٔ مختصات یک نقطه در فضای دو بعدی $(\mathbb{R}^2)$ است، که x را طول نقطه و y را عرض آن نقطه در نظر می گیریم.

۲. وقتی دو نقطهٔ $A(a,b)$ و $B(c,d)$ بر هم منطبق اند، که دو زوج مرتب با هم مساوی باشند، یعنی : $(a,b)=(c,d) \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ , \\ b=d \end{cases}$

۳. یک رابطه از A به B $(A \to B)$ $\xleftarrow{\text{یعنی}}$ $\left.\begin{matrix}\text{مؤلفه های اول متعلق به مجموعهٔ } A \\ \text{مؤلفه های دوم متعلق به مجموعهٔ } B\end{matrix}\right\}$ $\Leftarrow$ $R=\{(x,y) x\in A, y\in B\}$

۴. یک رابطه روی مجموعهٔ A یعنی x و y هر دو عضو مجموعهٔ A هستند. $(x,y\in A)$

۵. با معلوم بودن ضابطه و دامنهٔ یک رابطه می توان مجموعهٔ زوج های مرتب آن رابطه را نوشت، اما برعکس ، اگر مجموعهٔ زوج های مرتب (رابطه) معلوم باشد، یا نمی توان برای آن ضابطه ای نوشت یا چند ضابطه با ظاهری مختلف می توان برای آن نوشت.

۶. برای پیدا کردن اعضای یک رابطه (زوج های مرتب) می توان با توجه به دامنه و برد ، به x یا y در ضابطهٔ آن مقداردهی کرد و مؤلفهٔ دیگر را به دست آورد.

۷.یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود، یعنی اگر به ازای x ای از مجموعهٔ A یا y وجود نداشته باشد یا بیش از یک y وجود داشته باشد، آن رابطه یک تابع نیست.

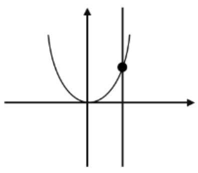
تابع نیست $\quad y$ موجود نباشد $\to x_1$

تابع نیست $\quad x_1 \nearrow y_1,\ x_1 \searrow y_2$

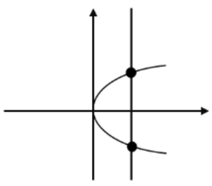
تابع است $\quad x_1 \searrow y_1,\ x_2 \nearrow y_1$

۸. وقتی یک نمودار ، نشان دهندهٔ یک تابع است، که هر خط عمودی (موازی محور y ها) در دامنهٔ داده شده ، نمودار را دقیقاً در یک نقطه قطع کند.

تابع است



تابع نیست



۹. **تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب است** : هیچ دو مؤلفهٔ اولی مساوی نباشند و در صورت برابری مؤلفه های اول ، مؤلفه های دوم نیز برابر باشند.

※ **دقت کنید ، برای تابع بودن اگر مؤلفه های دوم برابر باشند، نیازی به برابری مؤلفه های اول نیست.**

۱۰. g, f تابع هستند (به صورت مجموعهٔ زوج های مرتب) $\xrightarrow{\text{آن گاه}}$

- $f \cap g$ تابع است.
- $f - g$ تابع است.
- $f \cup g$ نامعلوم است $\Leftarrow$ اگر دامنه های g , f اشتراک نداشته باشند ، قطعاً تابع است.
- fog تابع است.

تذکر : اگر f برحسب زوج های مرتب ، یک تابع باشد آن گاه $f \cap g$, $f - g$ حتماً تابع هستند. حتی اگر g, f تابع نباشد !

۱۱.تشخیص تابع از روی ضابطهٔ آن : به ازای هر x عضو دامنهٔ تابع ، دقیقاً یک y وجود داشته باشد.

※ اگر y
- به توان زوج باشد
- درون قدرمطلق یا جزء صحیح باشد
- در کمان نسبت مثلثاتی باشد.

معمولاً تابع نیست ، مگر اینکه دامنه و برد به گونه ای خاص محدود شوند.

$\xrightarrow{\text{آن گاه}}$ (موارد استثناء زیادی وجود دارد که تابع باشند) .

۱۲. در یک رابطهٔ چند ضابطه ای ، وقتی y تابعی از x است که به ازای x های مشترک محدوده ها ، y های یکسان به دست آید. (البته علاوه بر اینکه هر کدام از ضابطه ها تابع باشند !!)

۱۳.
- اگر یک رابطه ، تابع باشد $\xrightarrow{\text{آن گاه}}$ (تعداد اعضای دامنه) $\leq$ (تعداد اعضای برد)
- (تعداد اعضای دامنه) $\leq$ (تعداد اعضای برد باشد) $\xrightarrow{\text{آن گاه}}$ لزوماً رابطه تابع نیست.

۱۴. در تابع $y = f(x)$ ، $y = f(a)$ را مقدار تابع به ازای $x = a$ می گوییم، که در واقع عرض نقطه ای به طول $x = a$ روی این تابع می باشد.

۱۵.
- مختصات هر نقطه ای روی نمودار تابع ، در ضابطهٔ تابع صادق است.
- مختصات نقطهٔ برخورد منحنی دو تابع ، در ضابطهٔ هر دو تابع صادق است.

۱۶. دامنه و برد تابع از روی نمودار :
- **دامنه :** محدوده ای از محور x ها که برای آن ها نمودار وجود دارد.
- **برد :** محدوده ای از محور y ها که برای آن ها نمودار وجود دارد.

یادداشت : با تصویر کردن (سایه انداختن) نمودار بر روی محورهای x و y می توان دامنه و برد را با دقت بالاتری تعیین کرد.

۱۷. تابع $f(x) = ax + b$ یا خط $y = mx + h$ را یک تابع خطی (درجه اول ، با شرط $a \neq 0$) می نامیم :

※ $m = a$ شیب خط

※ $y = b$ عرض از مبدأ آن خط (عرض نقطهٔ برخورد نمودار با محور y ها)

※ دامنه و برد در حالت کلی ، مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است (مگر اینکه دامنهٔ آن را محدود کنند).

※ اگر بازهٔ $[a,b]$ دامنهٔ تابع خطی باشد $\xrightarrow{\text{آن گاه}}$ $f(b), f(a)$ کمترین و بیشترین مقدار تابع (طرفین بازهٔ برد) هستند.

* اگر $f(x+n)=f(x)+m \xrightarrow{\text{آن گاه}} f$ یک تابع خطی با شیب $\frac{m}{n}$ است.

۱۸. تابع ثابت : تابعی که برد آن فقط یک عضو داشته باشد.

* به صورت $f(x)=c$ نمایش داده می شود.

* دامنه در حالت کلی ، مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است مگر اینکه برای دامنه محدودیت گذاشته شود.

* برد $=\{c\}$

* اگر تابع به صورت زوج مرتب بود $\xrightarrow{\text{باید}}$ مؤلفه های دوم برابر باشند.

* تابع ثابت با دامنهٔ $\mathbb{R}$، نوعی تابع خطی است که $a=0$ است. (شیب آن صفر و نمودار آن موازی محور x ها است).

۱۹. تابع همانی : تابعی که به هر عدد ، همان عدد را نسبت می دهد.

* به صورت $f(x)=x$ یا $y=x$ نشان داده می شود، که در واقع همان نیمساز ربع اول و سوم است.

* دامنه و برد آن در حالت کلی ، مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است.

* دامنه و برد آن همواره برابرند $\xrightarrow{\text{پس}}$ مؤلفه های اول و دوم یکسان هستند.

* نوعی تابع خطی با عرض از مبدأ صفر و شیب یک است.

۲۰. به توابع $f(x)=a_0x^{n-1}+...+a_n$ که $a_0\neq 0$ و $n\in\mathbb{N}$ است، یک چندجمله ای درجه n می گوییم :

تذکر : نیمساز ربع دوم و چهارم ، خط $y=-x$ است که بر نیمساز ربع اول و سوم عمود است.

چند جمله ای های معروف:
- تابع ثابت (درجه صفر) : $f(x)=c$
- تابع خطی (درجه **۱**) : $f(x)=ax+b$
- سهمی : $f(x)=ax^2+bx+c$
- چندجمله ای درجه **۳** : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

دامنهٔ توابع چند جمله ای در حالت کلی = مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$

برد توابع چندجمله ای :
- درجهٔ فرد باشد ، برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است. (در حالت $\mathbb{R}_f=\mathbb{R}$)
- درجهٔ زوج باشد ، زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}$ است و کل $\mathbb{R}$ نیست.

۲۱. تابع گویا : تابعی کسری که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشد.

* دامنه $=\mathbb{R}-\{$ ریشه های مخرج $\}$

* اگر مخرج فاقد ریشه باشد $\Leftarrow D_f=\mathbb{R}$

* اگر برد تابع گویا مدنظر سوال بود ، باتوجه به کتاب درسی یکی از روش ها این است که ابتدا دامنه را مشخص نموده و سپس در صورت امکان ضابطهٔ تابع را ساده کنیم و در پایان باتوجه به محدودهٔ x (دامنه) ، محدودهٔ y (برد) را به دست آوریم.

۲۲. دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج : در این توابع ، زیر رادیکال نباید منفی شود. در توابع زیر v, u چند جمله ای بر حسب x هستند.

۱) $y=\sqrt{u} \xrightarrow{\text{دامنه}} u \geq 0$

۲) $y=\dfrac{v}{\sqrt{u}} \xrightarrow{\text{دامنه}} u > 0$

۳) $y=\dfrac{\sqrt{u}}{v} \xrightarrow{\text{دامنه}} u \geq 0 \quad , v \neq 0$

۴) $y=\sqrt{\dfrac{u}{v}} \xrightarrow{\text{دامنه}} \dfrac{u}{v} \geq 0 \quad , v \neq 0$

۵) $y=\dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \xrightarrow{\text{دامنه}} u \geq 0 \quad , v > 0$

۶) $y=\dfrac{1}{v\sqrt{u}} \xrightarrow{\text{دامنه}} u > 0 \ , v \neq 0$

۷) $y=\dfrac{1}{v+\sqrt{u}} \xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} u \geq 0 \\ , \\ v+\sqrt{u} \neq 0 \end{cases}$

۸) $y=\dfrac{1}{\sqrt{v+\sqrt{u}}} \xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} u \geq 0 \\ , \\ v+\sqrt{u} > 0 \end{cases}$

۲۳. دامنهٔ توابع زیر با شرایط خاصی می تواند $\mathbb{R}$ باشد :

الف) $\dfrac{1}{ax+b} \xrightarrow[\text{مخرج فاقد ریشه}]{\text{دامنه} =\mathbb{R}} a=0, b \neq 0$

ب) $y=\dfrac{1}{ax^2+bx+c} \xrightarrow[\text{درجه دوم } (a\neq 0)]{\text{دامنه} =\mathbb{R}} \Delta < 0$

ج) $\sqrt{ax+b} \xrightarrow[\text{همواره نامنفی}]{\text{دامنه} =\mathbb{R}} a=0, b \geq 0$

د) $\dfrac{1}{\sqrt{ax+b}} \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{\text{دامنه} =\mathbb{R}} a=0, b > 0$

هـ) $\sqrt{ax^2+bx+c} \xrightarrow[a\neq 0]{\text{دامنه} =\mathbb{R}} \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ , \\ a > 0 \end{cases}$

تذکر : در مسائل مورد (هـ) دقت کنید که شرط $a=0$ را نیز جداگانه بررسی کنید، شاید دامنه $\mathbb{R}$ شود و قابل قبول باشد. مثلاً به ازای

$m \in (-\infty, -1) \cup \{1\}$ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(m^2-1)x^2+(m-1)x+1}$ برابر $\mathbb{R}$ است.

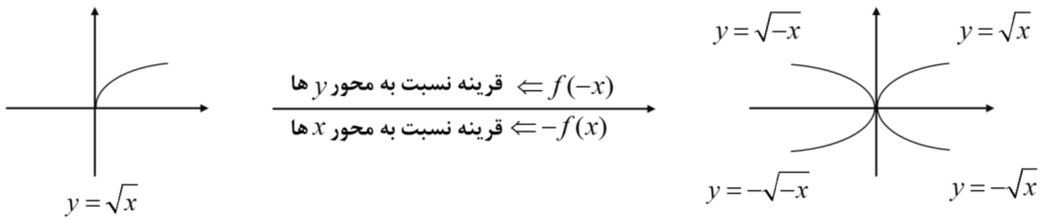
و) $\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \xrightarrow[a\neq 0 \text{ با فرض}]{\text{دامنه} =\mathbb{R}} \begin{cases} \Delta < 0 \\ , \\ a > 0 \end{cases}$

۲۴. دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد برابر همان دامنهٔ تابع زیر رادیکال است.

۲۵. اگر در تست های دامنه ، گزینه ها به صورت بازه داده شده باشد، می توان با امتحان کردن اعدادی مناسب از آن بازه ها در تابع ، گزینه های غلط (زیر رادیکالی منفی و ...) را حذف کرد. (راه تستی !!!)

۲۶. یکی از روش های محاسبهٔ برد توابع رادیکالی ، رسیدن از جزء به کل است، یعنی در یک تابع رادیکالی می توانیم ابتدا محدودهٔ عبارت زیر رادیکال و سپس محدودهٔ کل تابع را مشخص کنیم. (روش دیگر رسم نمودار است.)

۲۷. برای رسم نمودار توابع رادیکالی علاوه بر قوانین انتقال می توان از دامنه و برد آن ها نیز استفاده کرد.



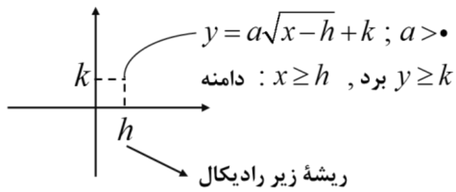
$$y=a\sqrt{x\pm h}\pm k$$

k واحد به بالا $(+)$ یا پایین $(-)$

h واحد به راست $(+)$ یا چپ $(-)$

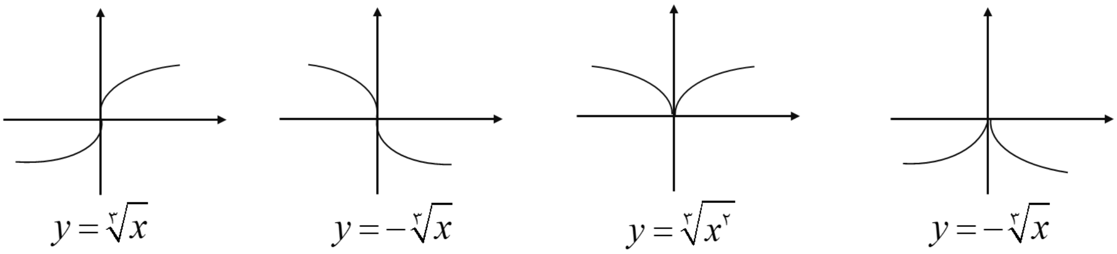
$a>0$: صعودی

$a<0$: نزولی



چهار نمودار طلایی رادیکال

۲۸. نمودار چند رادیکال فرجه **۳** که معروف و پرکاربرد هستند :



۲۹. دو تابع g, f را مساوی هم گوییم هرگاه : **۱**- دامنهٔ آن ها برابر باشد <u>(دامنهٔ قبل از ساده سازی)</u>

۲- به ازای هر x از دامنه، مقادیر تابع یکسان باشد.<u>(پس از ساده کردن مثل هم شوند.)</u>

❊ حتماً قبل از ساده سازی ، ابتدا با توجه به دامنه ها گزینه های غلط را حذف کنید، سپس ضابطهٔ توابع گزینه های باقی مانده را تا حد امکان ساده کنید.

۳۰. اعمال جبری روی توابع : اگر $g(x), f(x)$ دو تابع برحسب x باشند، آن گاه :

* $(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)\rightarrow D_{f\pm g}=D_f\cap D_g$

* $(f.g)(x)=f(x).g(x)\rightarrow D_{f.g}=D_f\cap D_g$

* $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\rightarrow D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x:g(x)=0\}$

* $(\frac{g}{f})(x)=\frac{g(x)}{f(x)}\rightarrow D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x:f(x)=0\}$

۳۱. اگر توابع g, f به صورت مجموعه هایی از زوج های مرتب داده شده باشند ، برای پیدا کردن برد توابع $\frac{f}{g}, f.g, f\pm g$ ابتدا دامنهٔ آن ها (مؤلفه های اول مشترک به جز ریشه های مخرج) را مشخص می کنیم، سپس اعمال جبری را (برای آن دامنه های مشترک) روی مؤلفه های دوم انجام می دهیم.

۳۲. اگر g, f یکی به صورت ضابطه و دیگری به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب باشد، برای اعمال جبری روی دو تابع کافی است، ابتدا دامنهٔ مشترک آن ها (به جز ریشه های مخرج) را به دست آورده و اعمال جبری را مانند حالت های قبل (هر دو ضابطه و یا هر دو زوج مرتب) روی مقادیر تابع انجام دهیم.

۳۳. اعمال جبری روی نمودارها و قوانین انتقال :

$* y=kf(x)\Rightarrow$
- $k<0$ نمودار نسبت به محور x ها قرینه می شود.
- عرض تمام نقاط k برابر می شود. $\Rightarrow$
  - $\xrightarrow{|k|>1}$ عرض نقاط زیاد می شود، یعنی نمودار جمع تر می شود.
  - $\xrightarrow{|k|<1}$ عرض نقاط کم می شود، یعنی نمودار بازتر می شود.
- نقاط برخورد با محور x ها تغییر نمی کنند.

$* y=f(x)\pm k\Rightarrow$ نمودار k واحد به بالا یا پایین منتقل می شود (عرض همهٔ نقاط k واحد اضافه یا کم می شود).

$* y=f(x-h)\Rightarrow$
- $h>0$ نمودار h واحد به راست منتقل می شود.
- $h<0$ نمودار h واحد به چپ منتقل می شود.

$* y=f(-x)\Rightarrow$ نمودار نسبت به محور y ها قرینه می شود.

$* y=f(ax)\Rightarrow$ طول نقاط $\frac{1}{a}$ برابر می شود.

$* y=f(\frac{x}{a})\Rightarrow$ طول نقاط a برابر می شود.

※در هنگام انتقال باید ترتیب انتقال ها در نکتهٔ **۳۳** رعایت شود.

※ ضرایب d, c درتابع $y=cf(ax+b)+d$ فقط بر روی برد تابع (مجموعهٔ مقادیرتابع) و ضرایب b, a فقط بر روی دامنه تأثیر دارند.

※ در حالت کلی در $y=f(ax+b)$ تأثیر b, a روی دامنهٔ تابع است. برای انتقال به چپ و راست باید دقت کنید که بعد از فاکتورگیری از a به صورت $y=f(a(x+\frac{b}{a}))$ نمودار به اندازهٔ $\frac{b}{a}$ به چپ یا راست منتقل می شود (نه به اندازهٔ b) و نیز دامنه $\frac{1}{a}$ برابر می شود.

※ یکی از روش های رسم نمودارهایی به فرم $y=f(ax+b)$ این است که از دامنه استفاده کنیم. به این صورت که عبارت داخل پرانتز را در محدوهٔ دامنهٔ تابع قرار دهیم و محدودهٔ x را به دست آوریم.

※ در $y=f(ax)$ دامنه $\frac{1}{a}$ برابر می شود، اما در $y=af(x)$ برد a برابر می شود.

* اگر نمودار توابع g, f داده شده باشد و اعمال جبری روی نمودارهای این دو تابع مدنظر باشد، ابتدا دامنهٔ مشترک آن ها را به دست آورده ، سپس در نقاط خاصی از دامنه ، مقادیر تابع را محاسبه کرده و نمودار را رسم می کنیم. ممکن است یکی از نمودارها به صورت تابع ثابت باشد که $\frac{f}{g}, f.g, f \pm g$ موجب انتقال نمودار می شود.)

۳۴. اگر $((f \pm g)of)(x) = (fof)(x) \pm (gof)(x)$ دو تابع باشند، $(fog)(x) = f(g(x))$ را یک ترکیب توابع g, f می گوییم.

(به جای O پرانتز می گذاریم!!) یعنی در $f(x)$ به جای x ها ، تابع $g(x)$ را جایگذاری می کنیم.

*اگر ترکیب تابع را به ازای x معلومی از ما خواستند نیازی به محاسبهٔ ضابطهٔ تابع ترکیب نیست و با جایگذاری x در تابع داخل پرانتز و محاسبهٔ مقدار آن ، مقدار ترکیب را به دست می آوریم.

* $((f \pm g)of)(x) = (fof)(x) \pm (gof)(x)$

* $(fo(f \pm g))(x) \neq (fof)(x) \pm (fog)(x)$

* برای ترکیب توابع دو ضابطه ای ، باید هر ضابطه را جداگانه ترکیب کنیم. محدوده های ضوابط fog همان محدوده های تابع داخلی یعنی g است.

* اگر $x = b, x = a$ ریشه های معادلهٔ $f(x) = k$ باشند ، آن گاه برای محاسبهٔ ریشه های معادلهٔ $(fog)(x) = k$، کافی است که $g(x) = b, g(x) = a$ را حل کنیم.

۳۵. معادلات دامنهٔ توابع مرکب :

روش اول : اگرضابطهٔ ترکیب توابع پیچیده و شلوغ نباشد،بهتر است آن را تشکیل داده و بدون هرگونه ساده سازی،دامنه را محاسبه کنیم.

روش دوم : اگر ضابطهٔ ترکیب توابع پیچیده و شلوغ باشد ، بهتر است از تعاریف زیر برای دامنه استفاده شود :

$$x \longrightarrow \boxed{g} \xrightarrow{g(x)} \boxed{f} \longrightarrow f(g(x))$$

$$D_{fog}\left\{x \in D_g \middle| g(x) \in D_f\right\} \rightarrow \begin{cases} \text{بین } x \in D_g \quad , \quad g(x) \in D_f \text{ اشتراک بگیرید.} \\ g(x) \in D_f \xrightarrow[\text{یعنی}]{} \text{در دامنهٔ } f \text{ به جای } x \text{، } g(x) \text{ را قرار دهید.} \end{cases}$$

$$D_{gof}\left\{x \in D_f \middle| f(x) \in D_g\right\}$$

$$D_{fof}\left\{x \in D_f \middle| f(x) \in D_f\right\}$$

راه تستی : اگر گزینه ها به صورت بازه باشد و در عدد گذاری مناسب مهارت داشته باشید، می توانید به سرعت گزینهٔ درست را پیدا کنید.

۳۶. وقتی ترکیب $fog(x)$ امکان پذیر است که برد تابع $g(x)$ (تابع داخلی) زیرمجموعه ای از دامنهٔ تابع $f(x)$ (تابع بیرونی) باشد :

$$\begin{cases} (fog)(x) \xrightarrow{\text{شرط ترکیب پذیری}} R_g \subseteq D_f \\ (gof)(x) \xrightarrow{\text{شرط ترکیب پذیری}} R_f \subseteq D_g \\ (fof)(x) \xrightarrow{\text{شرط ترکیب پذیری}} R_f \subseteq D_f \end{cases}$$

۳۷. برای محاسبهٔ برد تابع fog کافی است fog را تشکیل دهیم و با درنظر گرفتن دامنه (قبل تر از ساده سازی) در آخرین مرحله ، در صورت امکان ضابطهٔ آن را ساده کنیم و محدودهٔ کل تابع را به دست آوریم .

۳۸. در تابع $Af^n(ax+b)+B$ ، عبارت $g(x)=ax+b$ خطی $(a\neq ۰)$ است و تأثیری در برد ندارد یعنی برد دو تابع $f(x)$, $f(ax+b)$ یکسان است، اما n, B, A در برد تابع مؤثر هستند و کافی است که از محدودهٔ جزء f ، محدودهٔ کل Af^n+B را به دست آوریم.

۳۹. برای پیدا کردن دامنهٔ تابع fog از روی نمودارهای g, f کافی است که دامنه های g, f را باتوجه به نمودارهای آن ها مشخص کرده و سپس باتوجه به تعریف دامنهٔ تابع مرکب ، دامنهٔ fog را بیابیم. (روش دوم نکتهٔ **۳۵**)

۴۰. اگر دو تابع g, f به صورت زوج مرتب باشند و ما بخواهیم ترکیب آن دو را به دست آوریم (یا بخواهیم دامنه و برد تابع مرکب آن دو را به دست آوریم) باید به این صورت عمل کنیم که در هر زوج مرتب از تابع fog ، مؤلفهٔ اول از زوج مرتبی در تابع درونی g است که مؤلفهٔ دوم آن ، مؤلفهٔ اول تابع بیرونی f باشد و مؤلفهٔ دوم از همین زوج مرتب تابع بیرونی ، مؤلفهٔ دوم تابع مرکب است.

یادداشت : اگر توضیحات بالا گیج کننده و مبهم بود ، فقط به بیان ریاضی زیر نگاه کن !!!

$$(a,b)\in g\,,(b,c)\in f\Rightarrow(a,c)\in fog$$

$$\xrightarrow{a}\boxed{g}\xrightarrow{b}\xrightarrow{b}\boxed{f}\longrightarrow c$$

ماشین $fog(x)$

باید مؤلفهٔ دوم (خروجی) g مؤلفهٔ اول(ورودی) f باشد.

۴۱. در ترکیب دو تابع g, f وقتی یکی به صورت ضابطه و دیگری به صورت زوج مرتب است ، نیز مانند حالتی که هر دو زوج مرتب هستند، عمل می کنیم و در نتیجه تابع حاصل به صورت زوج مرتب می شود (یعنی تابع با ضابطهٔ هم به صورت زوج مرتب می شود).

۴۲. پیدا کردن تابع بیرونی با معلوم بودن تابع درونی و تابع مرکب (پیدا کردن $f(x)$ با معلوم بودن $g(x)$, $(fog)(x)$)

روش اول : عددگذاری و امتحان کردن گزینه ها : با دادن عدد دلخواه به x مقدار $g(a)$, $f(g(a))$ را به دست می آوریم و بررسی می کنیم که در کدام گزینه اگر به جای x مقدار $g(a)$ را قرار دهیم حاصل برابر $(fog)(a)$ می شود.

روش دوم (مهندسی معکوس) : نوشتن fog برحسب $g(x)$

روش سوم (تغییر متغیر) : $g(x)=t$ در نظر گرفته و x را برحسب t به دست می آوریم و در تابع fog به جای x عبارت به دست آمده برحسب t را می نویسیم و پس از ساده سازی در پایان به جای t ، x را قرار می دهیم و $f(x)$ به دست می آید.

۴۳. گاهی $g(x)$ و $(fog)(x)$ معلوم اند، اما به جای $f(x)$ ، $f(a)$ را می خواهند. در این مسائل نیازی به پیدا کردن ضابطهٔ $f(x)$ (تابع بیرونی) نیست و ما می توانیم تابع داخلی را برابر عدد داده شده قرار دهیم $g(x)=a$ تا مقدار x معلوم شود و با جایگذاری آن در تابع مرکب ، $f(a)$ را به دست آوریم.

۴۴. اگر fog , f معلوم باشند، و تابع داخلی g مجهول باشد، نیازی به سه روش نیست!!! یک روش ساده وجود دارد و آن این است که در $f(x)$ به جای x ها ، $g(x)$ می گذاریم و $f(g(x))$ را تشکیل می دهیم و با fog که معلوم است ، مساوی قرار داده و $g(x)$ را به دست می آوریم.

نکته : اگر $g(x)$ مدنظر باشد، نیازی به محاسبهٔ ضابطهٔ $g(x)$ نیست و از همان ابتدا به جای x در معادله a را قرار می دهیم.

۴۵ .

تابع اکیداً صعودی : با افزایش x ، y نیز به طور مرتب افزایش یابد : $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

تابع اکیداً نزولی : با افزایش x ، y به طور مرتب کاهش یابد : $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

تابع صعودی : با افزایش x ، y یا افزایش یابد ، یا ثابت باشد : $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

تابع نزولی: با افزایش x ، y یا کاهش یابد ، یا ثابت باشد : $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

تابع ثابت : با افزایش x ، y تغییری نکند (هم صعودی و هم نزولی) : $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$

نکته : هر تابع اکیداً صعودی ، صعودی هم است و هر تابع اکیداً نزولی ، نزولی هم است اما عکس این قضیه صحیح نمی باشد.

۴۶. یکنوایی :

اکیداً یکنوا : اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی

یکنوا : که صعودی یا نزولی (هر دو ثابت)

غیریکنوا : گاهی صعودی و گاهی نزولی (نه صعودی و نه نزولی)

۴۷. بررسی یکنوایی توابع چند جمله ای :

تابع خطی $y = ax + b$ یکنوا است. $\Leftarrow$

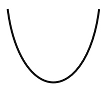
$a > 0 \Leftarrow$ اکیداً صعودی

$a < 0 \Leftarrow$ اکیداً نزولی

$a = 0 \Leftarrow$ هم صعودی و هم نزولی

* توابع به صورت $y = ax^2 + bx + c$ در حالت $a \neq 0$ درجه ۲ و غیریکنوا هستند.

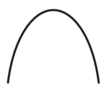
$\Leftarrow a > 0$:

 $\Leftarrow$ رو به بالا

$\Leftarrow (-\infty, \frac{-b}{2a}]$ اکیداً نزولی

$\Leftarrow [\frac{-b}{2a}, +\infty)$ اکیداً صعودی

$\Leftarrow a < 0$:

 $\Leftarrow$ روبه پایین

$\Leftarrow (-\infty, \frac{-b}{2a}]$ اکیداً صعودی

$\Leftarrow [\frac{-b}{2a}, +\infty)$ اکیداً نزولی

$$\text{* توابع درجه ۳ به فرم } y=a(x-h)^{۳}+k \Leftarrow \begin{cases} a>۰ \Leftarrow & \text{اکیداً صعودی} \\ a<۰ \Leftarrow & \text{اکیداً نزولی} \end{cases}$$

نکته : توابع درجه ۳ به فرم گستردهٔ $y=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ می تواند هم اکیداً یکنوا و هم غیریکنوا باشد، که بستگی به دلتای مشتق آن دارد که در فصل کاربرد مشتق بررسی شده است. اگر برای y' (تابع مشتق) دلتا مثبت باشد غیریکنوا است اما اگر $\Delta\le ۰$ باشد، اکیداً یکنوا است که در این حالت اگر $a>۰$ اکیداً صعودی و اگر $a<۰$ اکیداً نزولی است.

۴۸. نکات تکمیلی یکنوایی :

* قرینهٔ یک تابع صعودی ، تابعی نزولی است و برعکس.

* عکس یک تابع صعودی ($\frac{۱}{f(x)}$) تابعی نزولی است و برعکس. (البته تابع مورد نظر باید فاقد ریشه باشد ، چون تابع کسری که پس از ساده سازی ریشه داشته باشد، قطعاً غیریکنواست).

* یکنوایی در جمع :
- صعودی + صعودی $\Rightarrow$ صعودی
- نزولی+ نزولی $\Rightarrow$ نزولی
- صعودی + نزولی $\Rightarrow$ نامعلوم

$$\text{* صعودی : } f(x)\to\begin{cases} -f(x) & \text{نزولی} \\ \dfrac{۱}{f(x)} & \text{نزولی } (f\neq ۰) \end{cases}$$

* اکیداً یکنوایی در جمع
- نزولی+ اکیداً نزولی $\Rightarrow$ اکیداً نزولی
- صعودی+ اکیداً صعودی $\Rightarrow$ اکیداً صعودی

* یکنوایی در تفریق :
- صعودی - صعودی $\Rightarrow$ نامعلوم
- نزولی – نزولی $\Rightarrow$ نامعلوم
- صعودی - نزولی $\xrightarrow{f-g}$ صعودی + صعودی $\Rightarrow$ صعودی
- نزولی - صعودی $\Rightarrow$ نزولی + نزولی $\Rightarrow$ نزولی

* برای بررسی صعودی یا نزولی بودن ترکیب چند تابع از تکنیک + و – استفاده می کنیم، به این صورت که صعودی را + و نزولی را – منفی می گیریم.

fog صعودی $\xrightarrow{-\times-=+}$ $g\,,f$ هر دو نزولی

۴۹. یکنوایی تابع روی زوج های مرتب : اگر $f=\{(a_{۱},b_{۱}),(a_{۲},b_{۲}),(a_{۳},b_{۳})\}$, $a_{۱}>a_{۲}>a_{۳}$ باشند ، آن گاه :

$$\begin{cases} if\ \ b_{۱}\ge b_{۲}\ge b_{۳}\Rightarrow & \text{صعودی} \\ if\ \ b_{۱}\le b_{۲}\le b_{۳}\Rightarrow & \text{نزولی} \end{cases} \qquad \begin{cases} if\ \ b_{۱}>b_{۲}>b_{۳}\Rightarrow & \text{اکیداً صعودی} \\ if\ \ b_{۱}<b_{۲}<b_{۳}\Rightarrow & \text{اکیداً نزولی} \end{cases}$$

۵۰. هرگاه در رابطه ای به ازای هر x عضو دامنه ، دقیقاً یک y داشته باشیم (شرط تابع بودن) و به ازای هر y عضو برد نیز ، فقط یک x داشته باشیم (شرط یک به یک بودن) ، آن را تابعی یک به یک می گوییم.

۵۱. تشخیص یک به یک بودن تابع :

زوج مرتب : مؤلفه های اول یکسان (با مؤلفهٔ دوم متفاوت) و نیز مؤلفه های دوم یکسان (با مؤلفهٔ اول متفاوت) نداشته باشند. (شروط تابع بودن و یک به یک بودن)

نمودار : هر خط موازی محور x ها (افقی) نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۵۲. نکات تکمیلی یک به یک بودن :

در تابع یک به یک تعداد اعضای دامنه و برد برابر است.

هر تابع اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) یک به یک هستند. مثلاً $y=۲x+۳[x]$ و $y=-x-۲\sqrt{x}$ یک به یک هستند .

ممکن است تابعی غیر یکنوا باشد، اما یک به یک و وارون پذیر باشد. مانند توابع هموگرافیک از جمله $y=\frac{۱}{x}$

مثال

تابع ثابت $\Leftarrow$ غیر یک به یک

تابع درجه ۱ (خطی) $\Leftarrow$ یک به یک

تابع درجه ۲ (سهمی) $\Leftarrow$ درکل دامنه غیر یک به یک ولی در بازه هایی که شامل نقطهٔ درونی رأس نباشند ، یک به یک هستند.

توابع به صورت $y=\sqrt[m]{x^n}$ یا $y=\sqrt[m]{(x-a)^n}$ با شرط فرد بودن n یک به یک هستند.

۵۳. وارون یک تابع (تعاریف اولیه)

شرط لازم و کافی برای وارون پذیری یک تابع ، یک به یک بودن آن است.

در تابع f , $f^{-۱}$ دامنه و برد جابجا شده اند یعنی ؛ $\begin{cases} D_f=R_{f^{-۱}} \\ D_{f^{-۱}}=R_f \end{cases}$

تابع غیر یک به یک ، وارون ناپذیر است.

اگر در سوالی پرسیده شود $f^{-۱}$ از کدام نقطه می گذرد ، کافی است گزینه ها را وارون کرده و در f بررسی کنیم.

اگر $f(x)$ داده شود و مقدار $f^{-۱}(a)$ را بخواهند، $f(x)$ را برابر a قرار می دهیم و x را می یابیم.

۵۴. وارون یک تابع (نمودار)

برای رسم نمودار f^{-1} کافی است نمودار f را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ قرینه کنیم.

اگر نمودار تابعی نسبت به خط $y=x$ متقارن باشد ، وارون آن با خودش برابر است.

در یک تابع اکیداً صعودی ، نقاط برخورد f , f^{-1} (در صورت وجود) همان نقاط برخورد f با خط $y=x$ است. طول نقطهٔ برخورد f با محور x ها ، همان عرض نقطهٔ برخورد f^{-1} با محور y هاست و برعکس. (طول از مبدأ و عرض از مبدأ در f , f^{-1} عوض می شود.)

۵۵. محاسبهٔ ضابطهٔ وارون تابع :

مرحلهٔ **(۱)** : اگر در گزینه ها صحبت از دامنهٔ f^{-1} باشد ، ابتدا باید برد f را مشخص کنیم. $D_{f^{-1}}=R_f$

مرحلهٔ **(۲)** : به جای $f(x)$ ، y قرار داده و x را برحسب y به دست می آوریم.

مرحلهٔ **(۳)** : مستقیماً پس از محاسبهٔ x برحسب y به جای x ، $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x را جایگذاری می کنیم.

*** توجه داشته باشید که معکوس تابع درجه دوم (در بازه ای که یک به یک است) یک تابع رادیکالی با فرجهٔ ۲ و معکوس تابع درجه ۳ (در بازه ای که یک به یک است) یک تابع رادیکالی با فرجهٔ ۳ است و برعکس.**

٭ برای محاسبهٔ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ یا $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ابتدا باید f را به صورت مربع یا مکعب (یعنی $y=a(x-h)^2+k$ یا $y=a(x-h)^3+k$ را بنویسیم و سپس x را برحسب y به دست آوریم. فقط در حالت درجه ۲ به دامنه و برد باید توجه کنیم که دامنهٔ f^{-1} همان برد f است.

٭ تابع هموگرافیک در دامنه اش ($R-\{$ ریشهٔ مخرج $\}$) با این که غیریکنواست اما یک به یک و وارون پذیر است و وارون آن به صورت زیر است : (جای d , a عوض شده و قرینه شوند !)

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

اگر f , g دو تابع وارون پذیر باشند ، آن گاه

$$(f\pm g)^{-1}\neq f^{-1}\pm g^{-1}$$
$$(f.g)^{-1}\neq f^{-1}.g^{-1}$$
$$(\frac{f}{g})^{-1}\neq \frac{f^{-1}}{g^{-1}}$$
$$(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$$
$$(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$$
$$(fog^{-1})^{-1}=gof^{-1}$$

٭ برای معکوس کردن توابع چند ضابطه ای ، هر ضابطه را باتوجه به محدودهٔ x آن و برد آن ، جداگانه وارون کنیم.

۵۶. نکات تکمیلی تابع وارون :

❋ ترکیب دو تابع معکوس هم (fof^{-1} یا $f^{-1}of$) یک تابع همانی است ، یعنی ورودی و خروجی با هم برابر خواهند بود و برعکس آن اگر ترکیب دو تابع همانی شود آن دو تابع وارون یکدیگرند. $* \rightarrow \boxed{g} \longrightarrow \boxed{f} \rightarrow * \quad \Rightarrow f^{-1} = g \ , \ g^{-1} = f$

به عبارت دیگر اگر $(fog)(x) = x$ باشد ، $f\,,g$ معکوس یکدیگرند و همچنین $(f^{-1}of)(x) = x \ , \ (fof^{-1})(x) = x$ است.

$$\begin{cases} y = (f^{-1}of)(x) = x \rightarrow y = x & x \in D_f \\ y = (fof^{-1})(x) = x \rightarrow y = x & x \in D_{f^{-1}} \Rightarrow x \in R_f \end{cases}$$

❋ اگر $(fof)(x) = x$ باشد ، آن گاه وارون f با خودش برابر است ، یعنی $f^{-1}(x) = x$ (تابع f نسبت به خط $y = x$ قرینه است).

❋ در یک تابع هموگرافیک زمانی $f(x) = f^{-1}(x)$ است (نمودار f نسبت به محور $y = x$ قرینه یا $(fof)(x) = x$ است) ، که $a\,,d$ قرینه باشند یعنی ، $a = -d$ و همچنین $ad - bc \neq 0$ باشد.

❋ تابع خطی $f(x) = ax + b$ زمانی نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن است ($f = f^{-1}$) که $a = -1$ باشد. (b می تواند هر مقدار دلخواهی داشته باشد).