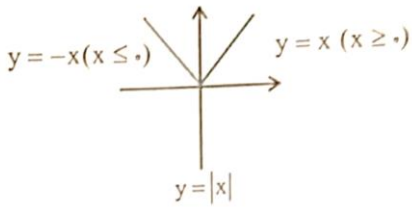
۱. تابع قدرمطلق

$$\begin{cases} f(x)=|x| \\ \text{دامنه}=\mathbb{R} \\ \text{برد}=[۰,+\infty)=(\text{اعداد نامنفی}) \\ |x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x\leq ۰ \end{cases} \end{cases}$$



۲. ویژگی های قدرمطلق :

$$۱)\ \sqrt[n]{u^n}\begin{cases} |x| & n \\ u & n \end{cases} \xrightarrow[\text{همواره}]{\text{اما}} (\sqrt[n]{u})^n=u$$

$$۲)\begin{cases} u & u\geq ۰ \quad \text{داخل قدرمطلق مثبت} \\ -u & u\leq ۰ \quad \text{داخل قدرمطلق منفی} \end{cases}$$

$$۳)\ \frac{|x|}{x}=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \\ \text{ت ن} & x=۰ \end{cases}$$

$$۴)\ |a-b|\begin{cases} a-b & a\geq b \\ b-a & a\leq b \end{cases}$$

$$۵)\ |u|=|-u|\Rightarrow\begin{cases} |x|=|-x| \\ ||x||=|-|x||=|x| \\ |a-b|=|b-a| \\ |-a-b|=|a+b| \end{cases}$$

$$۶)\ |x^۲|=|x|^۲=x^۲$$

$$۷)\ |u|=|-u|\Rightarrow\begin{cases} |ab|=|a||b| \\ \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\ (b\neq ۰) \\ |a\pm b|\neq |a|\pm|b| \end{cases}$$

$$۸)\begin{cases} \max\{x,-x\}=|x| \\ \min\{x,-x\}=-|x| \end{cases}$$

$$۹)\begin{cases} \frac{a+b}{۲}+\frac{|a-b|}{۲}=\max\{a,b\} \\ \frac{a+b}{۲}-\frac{|a-b|}{۲}=\min\{a,b\} \end{cases}$$

$$۱۰)\ \text{نامساوی مثلث}: |a+b|<|a|+|b|\Rightarrow\begin{cases} (ab\geq ۰) & \text{هم علامت} & b,a\Rightarrow|a+b|=|a|+|b| \\ (ab<۰) & \text{مختلف العلامت} & b,a\Rightarrow|a+b|<|a|+|b| \end{cases}$$

۳. رسم نمودار قدرمطلقی با انتقال : به کمک قوانین انتقال نمودارها و نمودار اصلی $y=|x|$ می توانیم نمودارهای توابع به صورت

$y=a|x\pm h|\pm k$ شامل یک قدرمطلق که عبارت داخل آن درجه **۱** است و x ای بیرون قدرمطلق نیست را رسم کنیم : $(k,h>۰)$

$$a\begin{cases} \text{علامت } a\begin{cases} a>۰ & \text{رو به بالا} \\ a<۰ & \text{رو به پایین} \end{cases} \\ \text{اندازه } a\begin{cases} |a|>۱ & \text{جمع تر} \\ |a|<۱ & \text{بازتر} \end{cases} \end{cases}$$

h: h واحد به چپ $(+)$ یا راست $(-)$

k: k واحد بالا $(+)$ یا پایین $(-)$

※ برای رسم دقیق تر هر نموداری بهتر است ، نقطهٔ برخورد با محور عرض ها را به عنوان نقطهٔ کمکی مشخص کنیم.

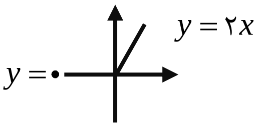
※ اگر ضریب x در داخل قدرمطلق منفی باشد ، با توجه به مجاز بودن قرینه کردن عبارت داخل قدرمطلق ، ضریب x را مثبت می کنیم. $|h-x|=|x-h|$

※ اگر ضریب x در داخل قدرمطلق غیر یک باشد ، از آن فاکتور گرفته و از قدرمطلق خارج می کنیم : $|ax+b| \xrightarrow{a>0} a\left|x+\frac{b}{a}\right|$

※ طول نقطهٔ زاویه دار در نمودار قدرمطلق ، ریشهٔ داخل قدرمطلق است. اما عکس آن درست نیست یعنی نمی توان گفت همه ریشه های داخل قدرمطلق ، زاویه دار هستند.

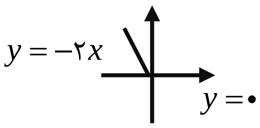
۴. رسم نمودار توابع قدرمطلقی به کمک چند ضابطه ای کردن : از این روش معمولاً زمانی استفاده می شود که تابع شامل چند قدرمطلق باشد یا x ای بیرون قدرمطلق قرار داشته باشد. در زیر نمودار چند تابع مهم قدرمطلق را یادآوری کرده ایم.

$$y=|x|+x=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$



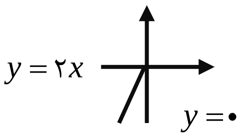
برد $=[0,+\infty)$
صعودی

$$y=|x|-x=\begin{cases}0 & x\geq 0\\ -2x & x\leq 0\end{cases}$$



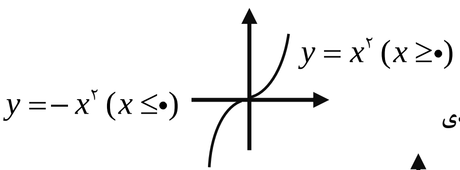
برد $=[0,+\infty)$
نزولی

$$y=x-|x|=\begin{cases}0 & x\geq 0\\ 2x & x\leq 0\end{cases}$$



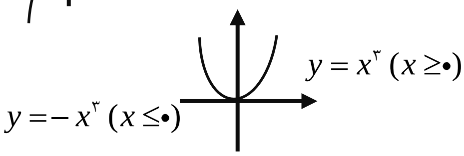
برد $=(-\infty,0]$
صعودی

$$y=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x^2 & x\leq 0\end{cases}$$



برد $=\mathbb{R}$
(اکیداً) صعودی

$$y=x^2|x|=\begin{cases}x^3 & x\geq 0\\ -x^3 & x\leq 0\end{cases} \xrightarrow[y=|x^3|]{}$$



برد $=[0,+\infty)$
غیریکنوا

۵. مراحل رسم نمودار چند تیپ مسائل خاص قدرمطلقی :

$y=|f(x)| \Leftarrow$
۱ـ رسم نمودار $y=f(x)$
۲ـ انتقال قسمت زیر محور x ها $(y<0)$ به بالای محور x ها (به صورت قرینه نسبت به محور x ها)

$y=f(|x|) \Leftarrow$
۱ـ رسم نمودار $y=f(x)$
۲ـ حذف نمودار در سمت چپ محور y ها $(x<0)$
۳ـ رسم قرینهٔ نمودار سمت راست محور y ها $(x>0)$, در سمت چپ $(x<0)$ (نمودار نهایی نسبت به محور y ها متقارن است.)

$y=f(-|x|) \Leftarrow$
۱ـ رسم نمودار $y=f(x)$
۲ـ حذف نمودار در سمت راست محور y ها $(x>0)$
۳ـ رسم قرینهٔ نمودار سمت چپ محور y ها $(x<0)$, در سمت راست $(x>0)$ (نمودار نهایی نسبت به محور y ها متقارن است.)

۶. رسم نمودار $y=\sqrt{|x\pm h|}$ $(h>0)$:

الف) روش دو ضابطه ای کردن (باتوجه به ریشهٔ داخل قدرمطلق)

ب) ۱- رسم نمودار $y=\sqrt{|x|}$ **۲**- انتقال نمودار به اندازهٔ h واحد به چپ $(+)$ یا به راست $(-)$

۷.رسم نمودار $y=\sqrt{|x|\pm a}$ **یا** $y=\sqrt{a-|x|}$ $(a>0)$:

الف) روش دو ضابطه ای کردن

ب) روش انتقال : ابتدا نمودار $y=\sqrt{x\pm a}$ یا $y=\sqrt{a-x}$ به کمک انتقال (دامنه) رسم می کنیم و سپس با استفاده از نکات مربوط به رسم نمودارهای $y=f(|x|)$ سمت چپ را شبیه سمت راست رسم می کنیم.

۸. رسم نمودار به روش نقطه گذاری : در توابع قدرمطلقی پیچیده تر شامل بیش از یک قدرمطلق ، یا دارای x ای بیرون قدرمطلق ، علاوه بر روش چند ضابطه ای کردن ، در موارد خاصی که عبارت داخل قدرمطلق درجه یک (خطی) هستند و قدرمطلق در عبارت x داری ضرب نشده باشد ، ابتدا مختصات نقاط مربوط به ریشه های داخل قدرمطلق (نقاط زاویه دار) و سپس نقاط دلخواهی در دو طرف آن ریشه ها را در تابع جایگذاری و در دستگاه مختصات رسم کرده و آن ها را به هم وصل می کنیم و از طرفین ادامه می دهیم.

۹. نمودار گلدانی :

ضابطه : $y=|mx+a|+|mx+b|$

دامنه $=\mathbb{R}$

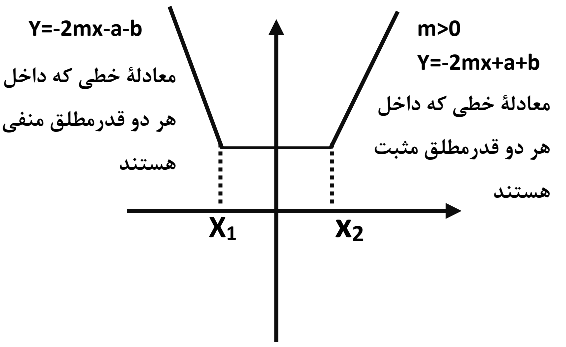
برد $=[|a-b|,+\infty)$ و $\min=|a-b|$ (کف گلدان)

نقاط زاویه دار (x_1,x_2) : ریشه های درون قدرمطلق ها

محور تقارن : خط $x=x_0$ که وسط دو ریشهٔ داخل قدرمطلق است.

دقت شود که ضریب x در هر دو قدرمطلق برابر (m) و بین دو قدرمطلق جمع است.

ضابطهٔ دو شاخه قرینهٔ هم اند.



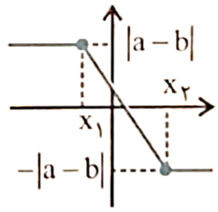
۱۰. نمودار آبشاری :

ضابطه : $y=|mx+a|-|mx+b|$

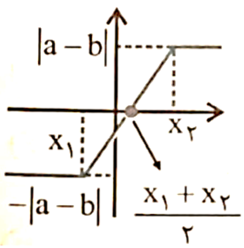
دامنه $=\mathbb{R}$

برد $=\left[-|a-b|,|a-b|\right]$

دقت شود که ضریب x در هر دو قدرمطلق برابر (m) و بین دو قدرمطلق تفریق است.



نزولی (ریشهٔ قدرمطلق دوم کوچک تر از اول)



صعودی (ریشهٔ قدرمطلق دوم بزرگ تر از اول)

یادداشت : برای رسم نمودار گلدانی و آبشاری می توان از روش نقطه گذاری نیز استفاده کرد.

۱۱.حل معادلات و نامعادلات قدرمطلقی :

$$۱)\begin{cases}|u|=a \xrightarrow{a>۰} u=\pm a\\ |u|=a \xrightarrow{a<۰} \text{جواب ندارد}\end{cases}$$

$$۲)\begin{cases}|u|<a \xrightarrow{a>۰} -a<u<a\\ |u|>a \xrightarrow{a>۰} u<-a \ \text{یا} \ u>a\end{cases}$$

$$۳)\begin{cases}|u|\le ۰ \xrightarrow{\text{فقط}} u=۰\\ |u|>۰ \xrightarrow{a<۰} u\ne ۰\end{cases}$$

$$۴)|a|=|b| \Rightarrow a=\pm b$$

$$۵)|a|<|b| \Rightarrow \quad \text{به توان ۲ رساندن طرفین و حذف قدرمطلق ها} \quad a^{۲}<b^{۲}$$

۱۲. اگر بازهٔ $a<x<b$ را به صورت نامساوی $|x-\alpha|<\beta$ بنویسیم آن گاه ، $\alpha=\frac{a+b}{۲}, \beta=\frac{b-a}{۲}$ خواهند بود به α مرکز همسایگی (بازه) و به β شعاع آن همسایگی می گوییم.

نکته : به $(a,b)-\{\alpha\}$ همسایگی محذوف متقارن می گوییم که مرکز آن حذف شده است و آن را با $۰<|x-\alpha|<\beta$ ، نشان می دهیم.

۱۳. اجتماع بازه های $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ را می توان به صورت نامعادلهٔ قدرمطلقی $|x-\alpha|>\beta$ نوشت ، که در آن $\alpha=\frac{a+b}{۲}, \beta=\frac{b-a}{۲}$ است.

یادداشت : نکات ۱۲ و ۱۳ برای بازه های بسته نیز قابل تعمیم است.

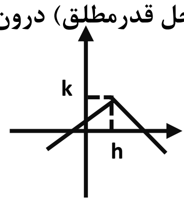
۱۴. برخی معادلات و نامعادلات قدرمطلقی را می توان با استفاده از رابطهٔ $x, |x|$ حل کرد.

$$\begin{cases}|x|=-x \Leftrightarrow x\le ۰\\ |x|=x \Leftrightarrow x\ge ۰\\ |x|>x \Leftrightarrow x<۰\\ |x|<x \Leftrightarrow \varnothing\end{cases} \xrightarrow[\text{تابعی از } x \ u]{\text{قابل تعمیم}} \begin{cases}|u|=-u \Leftrightarrow u\le ۰\\ |u|=u \Leftrightarrow u\ge ۰\\ |u|>u \Leftrightarrow u<۰\\ |u|<u \Leftrightarrow \varnothing\end{cases} \xrightarrow[u\in\mathbb{R}]{\text{همواره}} |u|\ge u$$

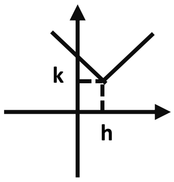
۱۵. برای حل برخی معادلات و نامعادلات قدرمطلقی می توان از رسم نموداراستفاده کرد ، به این صورت که تعداد جواب های معادلهٔ $f(x)=g(x)$ برابر تعداد نقاط برخورد نمودارهای $y=f(x), y=g(x)$ است و برای حل نامعادلهٔ $f(x)<g(x)$ ناحیه ای که نمودار $y=f(x)$ زیر نمودار $y=g(x)$ است را مشخص می کنیم.

۱۶. دامنهٔ تابع $f(x)=|g(x)|$ همان دامنهٔ $g(x)$ است ، یعنی قدرمطلق تأثیر مستقیمی در دامنه ندارد، اما اگر قدرمطلق در مخرج کسر یا زیر رادیکال(یا دیگر مواردی که در دامنه تأثیر دارند) قرار بگیرد، در حل معادلات و نامعادلات مربوط به دامنه مؤثر است.

۱۷. توابع قدرمطلقی به فرم $y=a|x-h|+k$ که نموداری مانند سهمی (درجه دوم) دارند، در دامنهٔ خود غیریکنوا هستند ، اما در بازه ای که طول نقطهٔ زاویه دار (ریشهٔ داخل قدرمطلق) درون آن نباشد اکیداً یکنوا هستند.



$\xrightarrow{a<0}$ $\begin{cases} (-\infty,h] \Rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ [h,+\infty) \Rightarrow \text{اکیداً نزولی} \\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow \text{غیریکنوا} \end{cases}$



$\xrightarrow{a>0}$ $\begin{cases} (-\infty,h] \Rightarrow \text{اکیداً نزولی} \\ [h,+\infty) \Rightarrow \text{اکیداً صعودی} \\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow \text{غیریکنوا} \end{cases}$

نکته : در حالت کلی برای تشخیص یکنوایی توابع قدرمطلقی ، بهترین روش رسم نمودار آن ها یا چند ضابطه ای کردن آن ها می باشد.

۱۸. بهترین روش برای تشخیص یک به یک بودن و معکوس پذیری توابع قدرمطلقی ، چند ضابطه ای کردن یا رسم نمودار آن ها است.

بر این اساس توابع $y=|x|$ و $y=x\pm|x|$ و $y=a|x-h|+k$ و $y=\dfrac{|x|}{x}$ و $y=x^{۲}|x|$ غیر یک به یک ، اما $y=x|x|$ یک به یک و معکوس پذیر است.

۱۹. جزء صحیح x **:** بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی x را جزء صحیح x می گوییم و آن را با $[x]$ نشان می دهیم :

$$[x]=\max\{n\in\mathbb{Z}, n\le x\}$$

۲۰. تابع جزء صحیح :

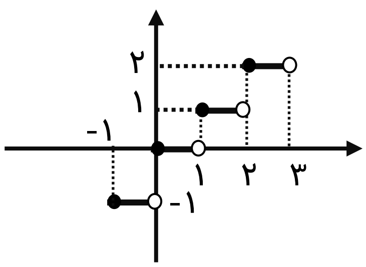
ضابطه : $y=[x]$

دامنه : $\mathbb{R}$

برد : $\mathbb{Z}$

صعودی

پاره خط ها از چپ توپر



۲۱. رابطه بین x **و** $[x]$ **:** $\begin{cases} [x]=x \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z} \\ [x]\le x \xleftarrow{x\in\mathbb{R}} [x]<x \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z} \\ [x]>x \Leftrightarrow \varnothing \end{cases}$

نکته : $\begin{cases} [x] \le x & \text{همواره} \\ |x| \le x & \text{همواره} \end{cases}$

۲۲. حل معادلات سادهٔ جزء صحیح دار : $\begin{cases} [u]=a \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} a \le u < a+۱ \\ [u]=a \xrightarrow{a\notin\mathbb{Z}} \text{جواب ندارد} \end{cases}$

۲۳. حل نامعادلات جزء صحیح دار :
- روش اول : رسم روی محور و امتحان کردن گزینه ها روش مطمئن تری خواهد بود.
- روش دوم : تبدیل نامعادله به چند معادله و اجتماع آن ها

راه تستی : اگر گزینه ها به صورت بازه باشد ، قاعدتاً امتحان کردن گزینه ها روش مطمئن تری خواهد بود.

۲۴. $n\in\mathbb{Z} \Rightarrow [x\pm n]=[x]\pm n$

تذکر : نکتهٔ فوق برای ضرب کلیت ندارد و صادق نیست یعنی $[-x] \ne -[x]$

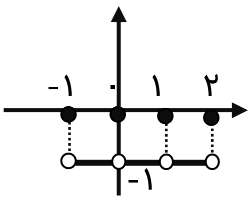
۲۵. $\begin{cases} [x-[x]]=[x]-[x]=۰ \\ [[x]-x]=[x]+[-x] \end{cases}$

۲۶. $[-x]=\begin{cases} -[x]\ ,\ x\in\mathbb{Z} \\ -[x]-۱\ ,\ x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$

* برای رسم نمودار $y=[-x]$ ، کافی است نمودار $y=[x]$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

۲۷. $[[x]-x]=[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$

$f(x)=[x]+[-x] \Rightarrow D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=\{۰,-۱\}\ ,\ T=۱$

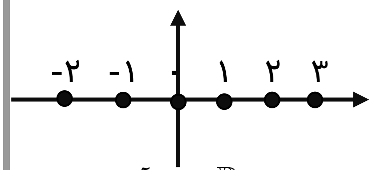


به طور کلی : $[u]+[-u]=\begin{cases} ۰ & u\in\mathbb{Z} \\ -۱ & u\notin\mathbb{Z} \end{cases}$

$g(x)=[ax]+[-ax] \Rightarrow D_g=\mathbb{R}\ ,\ R_g=\{۰,-۱\}\ ,\ T=\frac{۱}{|a|}$

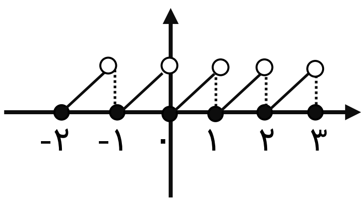
۲۸. دو تابع $f(x)=\sqrt{[x]+[-x]}$ و $g(x)=\sqrt{[x]-x}$ مساوی هستند ، چون دامنهٔ هر دوی آن ها $\mathbb{Z}$ و با این دامنه ضابطهٔ آن ها تابع ثابت $y=۰$ خواهد شد.

نمودار این دو تابع به صورت نقاط مقابل است.



۲۹. تابع $y=x-[x]$ را تابع جزء اعشاری می گوییم که در واقع فاصلهٔ x با $[x]$ را نشان می دهد. دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $[۰,۱)$ است.

$y=x-[x] \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه} = \mathbb{R} \\ \text{برد} = [۰,۱) \\ \text{تناوب} : T=۱ \\ \text{طول هرپاره خط} = \sqrt{۲} \end{cases}$



۳۰. $\begin{cases} 0 \le x-[x] < 1 \longrightarrow [x] \le x < [x]+1 \\ -1 < [x]-x \le 0 \longrightarrow x-1 < [x] \le x \end{cases}$

۳۱. اگر y, x دو عدد حقیقی باشند ، آن گاه در حالت کلی : $\begin{cases} [xy] \ne [x][y] \\ [x \pm y] \ne [x] \pm [y] \end{cases}$

۳۲. اگر β, α به ترتیب جزء اعشاری y, x باشند ، آن گاه :

$$[x+y] = \begin{cases} [x]+[y]\ , \ 0 < \alpha+\beta < 1 \\ [x]+[y]+1\ , \ 1 \le \alpha+\beta < 2 \end{cases} \Rightarrow [x]+[y] = \begin{cases} [x+y] \\ \text{یا} \\ [x+y]-1 \end{cases}$$

۳۳. به جهت نامساوی ها دقت کنید :

$$\left.\begin{array}{l} \text{جزء صحیح} \xrightarrow{\text{همواره}} \left\{\begin{array}{l} [x] \le x \\ [x+y] \ge [x]+[y] \end{array}\right. \\ \text{قدرمطلق} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} |x| \ge x \\ |x+y| \le |x|+|y| \end{array}\right. \end{array}\right.$$

۳۴. به طور کلی برای رسم نمودار توابع شامل $[u]$ باید u را به ازای اعداد صحیح مختلف a در بازهٔ $a \le u < a+1$ در نظر گرفت و محدودهٔ x و مقدار y را به دست آوریم و در واقع جزء صحیح را حذف و آن را چند ضابطه ای کرده ایم. یک تابع چند ضابطه ای در بازه های مختلف را هم که می توانیم رسم کنیم.

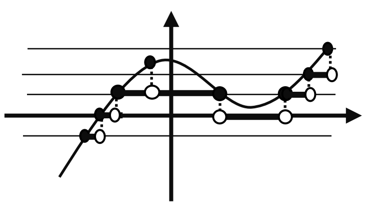
$$y = a[bx]+c \Rightarrow \begin{cases} \text{مرز بازه ها اعدادی هستند که داخل جزء صحیح را عددی صحیح می کنند.} \\ \text{طول بازه ها (پاره خط ها)} = \dfrac{1}{|b|} \\ \text{ارتفاع پله ها} = |a| \\ b > 0 \Rightarrow \text{پاره خط ها از چپ توپر} \\ b < 0 \Rightarrow \text{پاره خط ها از راست توپر} \\ a.b > 0 \Rightarrow \text{صعودی} \\ a.b < 0 \Rightarrow \text{نزولی} \\ \text{اگر نقاط توپر را به هم وصل کنیم نمودار } y = abx + c \text{ حاصل می شود} \end{cases}$$

نکته : اگر در صورت سوال یا گزینه ها ، نمودار تابع جزء صحیح داری داده شده باشد ، می توان از عدد گذاری و مقدار دهی به تابع در چند نقطه استفاده کرد.

یادداشت : اگر تعداد پاره خط ها مد نظر بود ، نقاطی که داخل جز صحیح را عددی صحیح می کنند ، به عنوان مرز بازه ها در نظر گرفته و تعداد پاره خط ها ، بدون رسم نمودار مشخص می شود.

۳۵. **رسم نمودار توابع :** $y = [f(x)]$:

مرحلهٔ (۱) : رسم نمودار $y = f(x)$ و خطوط افقی با عرض صحیح $(y = y_0\ ,\ y_0 \in \mathbb{Z})$



مرحلهٔ (۲) : توپر کردن نقاط برخورد نمودار $f(x)$ با خطوط افقی

مرحلهٔ (۳) : تصویرکردن نمودار بین دو خط افقی بر روی خط پایینی

۳۶. رسم نمودار توابع $y=f([x])$ **:** کافی است برای بازه های مختلف $a \le x < a+1$ مقدار $f(a)$ را به دست آوریم.

۳۷. توابع به صورت $y=a[bx]+c$ یکنوا (غیراکید) هستند :

$$\left.\begin{array}{l} a.b>0 \xrightarrow{\text{هم علامت } b,a} \text{صعودی} \\ a.b<0 \xrightarrow[\text{مختلف العلامت}]{b,a} \text{نزولی} \end{array}\right.$$

※ توابع $y=[x]-x \;,\; y=x-[x]$ غیریکنوا هستند ، اما در هربازهٔ دوره تناوب خود یکنوا هستند.

※ $y=x+[x]$ اکیداً صعودی است. به طور کلی توابع به صورت $y=ax+b[x]$ اگر $a,b>0$ باشند ، (a,b هر دو مثبت) اکیداً صودی و اگر $a,b<0$ باشند ، (b,a هر دو منفی) اکیداً نزولی هستند.

یادآوری : هر تابع اکیداً یکنوا ، یک به یک و وارون پذیر است.

۳۸. توابع $y=[x] \;,\; y=x-[x] , y=[x]-x , y=x[x] , y=|x|[x] , y=\dfrac{[x]}{x} , y=a[bx]+c$ ، همگی غیر یک به یک هستند و وارون ناپذیر ، اما تابع $y=x+[x]$ و به طور کلی $y=ax+b[x]$ که b,a هم علامت اند ، یک به یک و وارون پذیر است.

نکته : برای محاسبهٔ وارون یک تابع جزء صحیح دار ، باید آن را به صورت چند ضابطه ای بنویسیم و هر ضابطه را در دامنه و برد خود معکوس کنیم.